Přednáška 05A

Transformace souřadnic při integraci

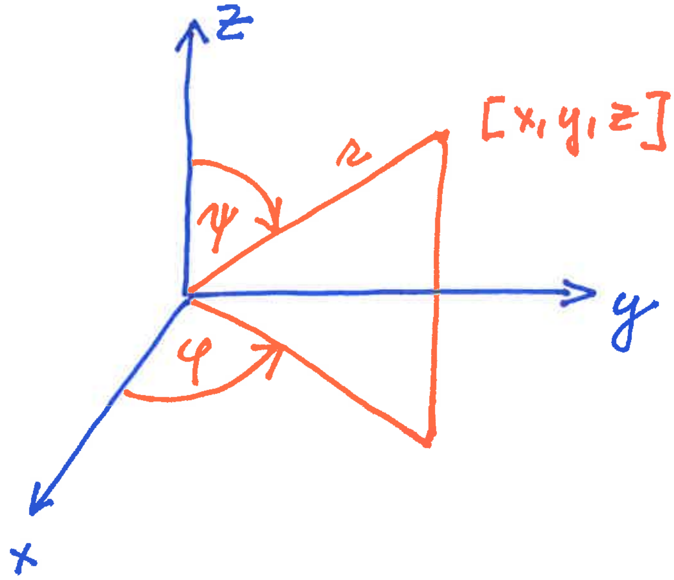
Aplikace

Opakování – viz předchozí přednáška

Věta o transformaci

Válcové souřadnice

Sférické souřadnice



$$x = r\cos\varphi \sin\psi$$
$$y = r\sin\varphi \sin\psi$$
$$z = r\cos\psi$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$
$$\cos\psi = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$r \in [0, \infty)$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$
$$\psi \in [0, \pi]$$

Příklad Vypočtěte

$$\int_V x^2+y^2+z^2 \, dx\, dy\, dz$$

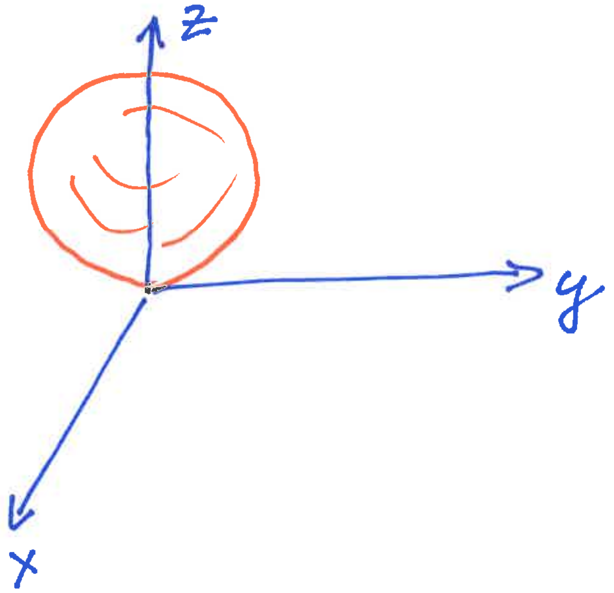
kde $V \subseteq \mathbb{R}^3$ je množina omezená plochou

$$x^2+y^2+z^2 = z$$

Řešení Plocha je sféra

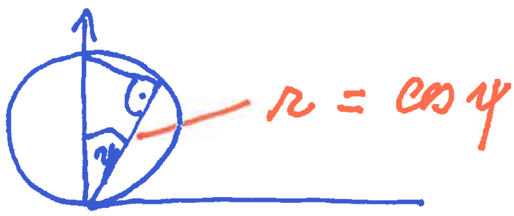
$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

se středem $[0, 0, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.



Budeme počítat se sférickými souřadnicemi

$$\int_V r^3 \sin\psi \, dr\, d\varphi\, d\psi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\psi} r^2 \sin\psi \, d\psi\, d\varphi$$



③

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\psi} \sin\psi \, d\psi \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4\psi}{4} \sin\psi \, d\psi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^0 -\frac{u^4}{4} \, du \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{u^4}{4} \, du \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{u^5}{20}\right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{10}\pi .$$

Fyzikální aplikace

① Hmotnost – těleso o objemu V (množina) s hustotou $\rho(x,y,z)$ má hmotnost

$$M = \int_V \rho(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

② Těžiště tělesa Těleso zaujímá množinu $V \subseteq \mathbb{R}^3$, má hustotu $\rho(x,y,z)$. Pak souřadnice $[x_0, y_0, z_0]$ jeho těžiště jsou

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_V x \, \rho(x,y,z) \, dx \, dy \, dz ,$$

(4)

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_V y\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_V z\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

(3) Moment setrvačnosti tělesa zaujímajícího množinu V a hustotě $\rho(x,y,z)$ vzhledem k ose l je

$$I_l = \int_V \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

kde $d(x,y,z)$ je vzdálenost bodu ~~od~~ $[x,y,z]$ od osy l.

Příklady

Těžiště úsečky $[0,a]$

$$M = \int_0^a 1\, dx = a$$

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a x\, dx = \frac{1}{a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a}{2}$$

Těžiště Δ s vrcholy $[0,0]$, $[a,0]$, $[b,c]$, $c>0$

$$M = \int_\Delta 1\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^b \left(\int_0^{\frac{x}{b}c} 1 \, dy \right) dx + \int_b^a \left(\int_0^{c\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^b \frac{x}{b} \cdot c \, dx + \int_b^a c\left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right) dx =$$

$$= \frac{b^2}{2} \, \frac{c}{b} + \left[c\left(x - \frac{(x-b)^2}{2(a-b)}\right) \right]_b^a =$$

$$= \frac{bc}{2} + c\left(a - \frac{(a-b)^2}{2(a-b)}\right) - c(b) = \frac{bc}{2} + ca - \frac{c(a-b)}{2} - cb$$

$$= \frac{ac}{2}$$ *Vyšlo nám, co mělo.*

$$\frac{ac}{2} x_0 = \int_\Delta x \, dx \, dy = \int_0^b x \int_0^{\frac{x}{b}c} 1 \, dy + $$

$$+ \int_b^a x \left(\int_0^{c\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)} 1 \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^b \frac{x^2}{b} \cdot c \, dx + \int_b^a c x \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right) dx =$$

$$= c\left[\frac{x^3}{3b}\right]_0^b + \left[c \frac{x^2}{2}\right]_b^a - c\left[\frac{\frac{x^3}{3} - b\frac{x^2}{2}}{a-b} \right]_b^a =$$

$$= \dots\dots = \frac{ac}{2} \cdot \frac{a+b}{3}$$

Tedy $$x_0 = \frac{a+b}{3} = \frac{0+a+b}{3}.$$

Analogicky $$y_0 = \frac{c}{3} = \frac{0+0+c}{3}$$

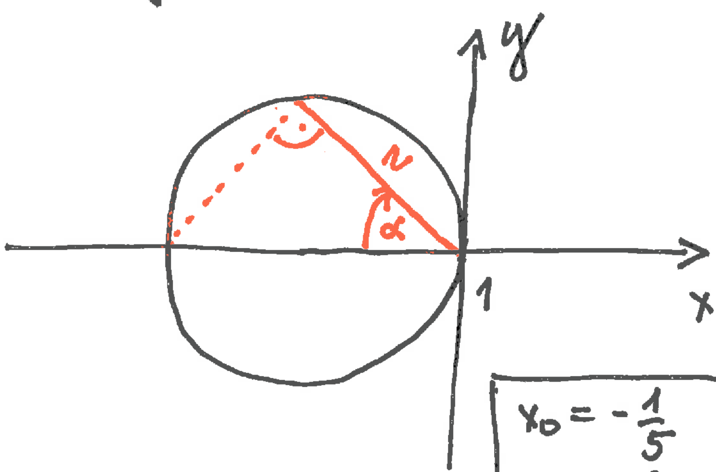
<u>Příklad</u> Těžiště kruhové destičky

$$x^2+y^2 \le 1$$

kde hustota je úměrná vzdálenosti bodu $[x,y]$ od bodu $[1,0]$.

$$\rho(x,y) = k \cdot \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$M = \int\limits_{x^2+y^2 \le 1} k \cdot \sqrt{(x-1)^2+y^2}\, dx\, dy =$$



$=$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= -\tfrac{1}{5} \\ y_0 &= 0 \end{aligned}}$$

$x = 1 - r\cos\alpha$

$y = r \sin\alpha$

absolutní hodnota jacobiánu je r

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\alpha} k r^2\, dr \right) d\alpha \qquad x_0 = \frac{1}{M} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\alpha} k r^3 \cos\alpha\, dr \right) d\alpha$$