Přednáška 05b

Integrování po křivkách a plochách

Křivkový integrál 1. druhu

nechť $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je křivka v $\mathbb{R}^2$

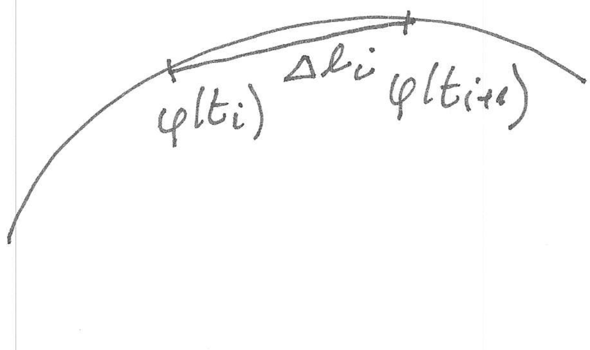
$C = \varphi([a,b])$, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$

Integrál

$$\int_C f(x,y)\, dl$$

se nazývá křivkový integrál 1. druhu a je definován součtem

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_1(\xi_i), \varphi_2(\xi_i))\, \Delta l_i$$



Výpočet

$$\int_C f(x,y)\, dl = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\, \|\varphi'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\, \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dt$$

Křivkový integrál 2. druhu

$F : C \to \mathbb{R}^2$ Integrál počítá práci vykonanou silou F po křivce C.

$$\int_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_C F(x,y) \bullet \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\,dl$$

$$= \int_a^b \left\{ F_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\, \varphi_1'(t) + F_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\, \varphi_2'(t) \right\} dt$$

Je-li křivka C uzavřená, tj $\varphi(a) = \varphi(b)$, píšeme místo $\int_C$

$$\oint_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

Výpočet křivkového integrálu 2. druhu pomocí plošného integrálu – Greenova věta

<u>Věta</u>: Je-li M jednoduše souvislá oblast v rovině ohraničená kladně orientovanou uzavřenou křivkou C, pak

$$\oint_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

Příklad Spočtěte: C je kružnice $x^2+y^2=1$

$$\int_C (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{kruh}\\ x^2+y^2\le 1}} (y+1-x-1)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} (\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^1 r^2 . 0\,dr = 0 .$$

Plošný integrál 1. druhu

S plocha v $\mathbb{R}^3$ je parametricky zadána zobrazením $\varphi : N \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $S=\varphi(N)$. φ je spojitě diferencovatelná a platí, že

$$\text{hodnost} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Integrál

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

je definován pomocí vzorce

$$\sum_{i,j} f(\varphi(\xi_i, \xi_j))\, m(S_{ij})$$

aproximací

kde $m(S_{ij})$ je obsahu plochy $\varphi([u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}])$

$m(S_{ij})$ je obsah rovnoběžníku určeného

vektory
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

Ten je roven velikosti vektorového součinu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

kde $A = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$B = -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$C = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Pak plošný integrál 1. druhu spočteme takto:

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_N f(\varphi(u,v)) \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\;du\,dv$$

<u>Příklad</u> Výpočet povrchu koule s poloměrem 1.

$$\iint_S 1\,ds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\;du\,dv = \dots = 4\pi$$

$$\varphi_1(u,v) = x = \cos u \sin v$$
$$\varphi_2(u,v) = y = \sin u \sin v$$
$$\varphi_3(u,v) = z = \cos v$$

<u>Plošný integrál 2. druhu</u> a vektorového zobrazení

$F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je

$$\iint_S F_1(x,y,z)\,dy\,dz + F_2(x,y,z)\,dx\,dz + F_3(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$= \iint_S F(x,y,z) \cdot \vec{n}(x,y,z)\,ds =$$

⑥

$$= \iint_N \{F_1(\varphi(u,v))\, A(u,v) + F_2(\varphi(u,v))\, B(u,v) + F_3(\varphi(u,v)) \cdot C\} \, du\, dv$$

Příklad

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

Parametrizace
$$x = \cos u \sin v$$
$$y = \sin u \sin v$$
$$z = \cos v$$

dalsí

$$\vec{n} = (-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin^2 u \sin v \cos v - \cos^2 u \sin v \cos v)$$

$$= (-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v)$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \sin v \cos^2 v)\, du\, dv$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (\sin^3 v + \sin v \cos^2 v)\, dv = 4\pi$$

Věta (Gaussova-Ostrogradského)

Nechť V je jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^3$

nechť $F: V \to \mathbb{R}^3$ má spojité parciální derivace a nechť S je plocha ohraničující V orientovaná ve směru vnější normály.

Pak

$$\iint_S F_1(x,y,z)\,dy\,dz + F_2(x,y,z)\,dx\,dz + F_3(x,y,z)\,dy\,dz$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\right) dx\,dy\,dz$$

<u>Příklad</u>

$$I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3\,dx\,dy\,dz = 3 \cdot \text{objem koule} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi$$

$$= 4\pi$$

<u>Jiný zápis</u>

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} = \iiint_V \operatorname{div} F$$