Přednáška 06a

Ještě k integrování po křivkách a plochách

Diferenciální formy v $\mathbb{R}^3$

0-formy jsou funkce

1-formy $\quad w = f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$

2-formy $\quad w = f(x,y,z)\,dy\wedge dz + g(x,y,z)\,dz\wedge dx + h(x,y,z)\,dx\wedge dy$

3-formy $\quad w = f(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$

k-formy lze evidentním způsobem sčítat.

Lze je rovněž integrovat, 1-formy přes křivky, 2-formy přes plochy a 3-formy přes omezené otevřené množiny v $\mathbb{R}^3$

C křivka, S plocha, $M \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená omezená

Integrace 1-formy

$$\int_C f\,dx + g\,dy + h\,dz = \int_a^b \Big\{ f(\varphi(t))\,\varphi_1'(t) + g(\varphi(t))\,\varphi_2'(t) + h(\varphi(t))\,\varphi_3'(t) \Big\}\,dt$$

kde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace křivky C, která zadává její orientaci.

Integrace 2-formy

$$\int_S f\, dy\wedge dz + g\, dz\wedge dx + h\, dx\wedge dy =$$

$$= \int_N \{f(\varphi(u,v))\, A(u,v) + g(\varphi(u,v))\, B(u,v) + h(\varphi(u,v))\, C(u,v)\}\, du\, dv$$

kde $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace plochy S

a $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = \begin{pmatrix} A(u,v) \\ B(u,v) \\ C(u,v) \end{pmatrix}$ je vektor ve směru vnější normály

Integrace 3-formy

$$\int_M f\, dx\wedge dy\wedge dz = \int_M f\, dx\,dy\,dz$$

Formy lze mezi sebou násobit. Symbol pro násobení je $\wedge$ a součin k-formy s l-formou je $(k+l)$-forma. Pravidla pro násobení jsou tato:

$$dx\wedge dy = -dy\wedge dx, \quad dx\wedge dz = -dz\wedge dx, \quad dy\wedge dz = -dz\wedge dy$$

Odtud plyne $dx\wedge dx = 0 = dy\wedge dy = dz\wedge dz$.

Dále

$$(a\, w^1 + b\, w^2)\wedge w^3 = a\, w^1\wedge w^3 + b\, w^2\wedge w^3$$

kde a, b jsou funkce, w^1 a w^2 k-formy a w^3 je l-forma.

Další operace s formami je diferenciál.

Diferenciál k-formy ω je $(k+1)$-forma $d\omega$.

<u>Diferenciál 0-formy</u> (funkce)

$$d(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

<u>Diferenciál 1-formy</u>

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) = \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dx}_{=-dx\wedge dy}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\wedge dx + \cdots\cdots + \frac{\partial h}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dz}_{=0} =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{dz}\right) dy\wedge dz$$

<u>Diferenciál 2-formy</u>

$$d(f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy\wedge dz}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dy\wedge dz}_{=0}$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{\partial h}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dx\wedge dy}_{=dx\wedge dy\wedge dz} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial h}{\partial z}\,dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{dz}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

Stokesova věta

Nechť M je „k-rozměrná množina" a ∂M její „$(k-1)$-rozměrná" hranice. Pak pro $(k-1)$-rozměrnou formu w platí

$$\int_{\partial M} w = \int_{M} dw .$$

Zvláštní případy

① M podmnožina v $\mathbb{R}^2$ ohraničená křivkou $C = \partial M$. Potom pro $w = f\,dx + g\,dy$ platí

$$\oint_{C} f\,dx + g\,dy = \int_{M} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy .$$

To je <u>Greenova věta</u> z předchozí přednášky

② M podmnožina v $\mathbb{R}^3$ ohraničená plochou $S = \partial M$. Potom pro 2-formu $w = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ platí

$$\int_{S} f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$$

$$= \int_{M} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx\wedge dy\wedge dz$$

To je <u>Gaussova - Ostrogradského věta</u>.

③ S je plocha v $\mathbb{R}^3$, jejíž hranicí je křivka $C = \partial S$. Pro 1-formu $w = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ platí

$$\int_C f\,dx + g\,dy + h\,dz = \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$+ \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{dz}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

Diferenciální rovnice

Motivace

Růst populace $\quad y(t)$ velikost populace v čase t

$$y'(t) = r\,y(t)$$

Řešení je $\quad y(t) = Ce^{rt}$

Jiný model $\quad y'(t) = r\,y(t) + s$

Vyhovuje konstantní funkce $y(t) = -\frac{s}{r}$. (Dosaďte!)

Obecné řešení je $\quad y(t) = Ce^{rt} - \frac{s}{r}$

(Přesvědčte se o tom!)

<u>Kmitání pružiny</u> – velikost výchylky y

zrychlení y'' je úměrné velikosti výchylky s opačným znaménkem

$$y''(t) = -y(t)$$

Všechna řešení tvoří vekt. prostor

$$a \sin t + b \cos t = R \sin(t-\tau)$$

K určení potřebujeme znát

$$y(\tau) \quad a \quad y'(\tau).$$

<u>Tlumené kmity</u>

$$y''(t) = -y(t) - \alpha y'(t)$$

<u>Diferenciální rovnice 1. řádu</u>

$$F(x, y, y') = 0$$

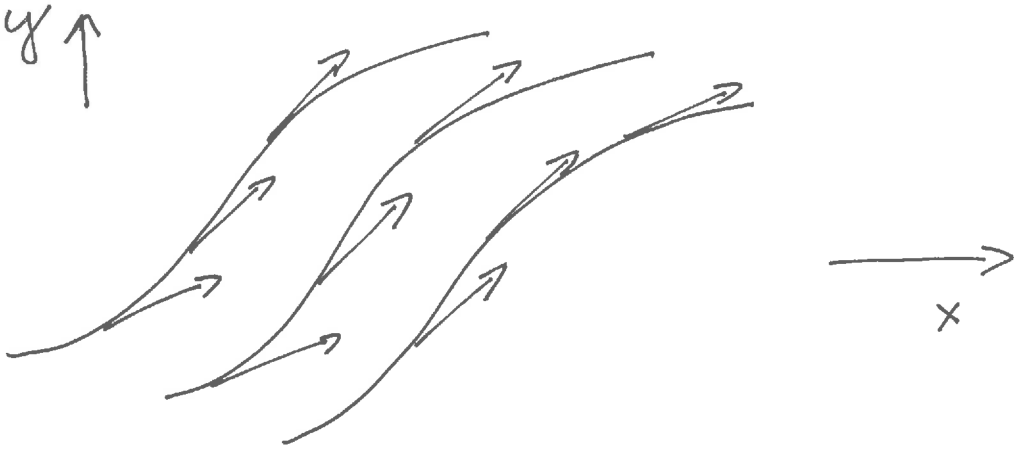
pro nějakou pevnou funkci F. Hledáme funkci $y(x)$ na nějakém intervalu, která má derivaci a platí

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Obvykle máme

$$y' = f(x,y)$$

<u>Geometrický význam</u> v $\mathbb{R}^2$ máme zadáno vektorové pole $v(x,y) = (1, f(x,y))$ a hledáme křivky zadané jako grafy funkcí $\varphi(x) = (x, y(x))$, které mají tečny zadané vektorovým polem.



Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)\, g(y)$$

Předpokládáme $g(y) \neq 0$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

integrujeme od x_0 do x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

$$\int_{y_0 = y(x_0)}^{y = y(x)} \frac{1}{g(z)}\, dz = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

$$G(y) = C + F(x)$$

kde G a F jsou příslušné primitivní funkce.

Příklad

$$y'(x) = x\, y(x)$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int_{x_0}^{x} t$$

$$\ln|y(x)| - \ln|y(x_0)| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2$$

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$|y(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = D e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$y(0)$ je kladné, pak

$$y(x) = y(0)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$y(0)$ je záporné, pak $D = -y(0)$ a

$$y(x) = y(0)\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$y(0) = 0$ pak máme řešení

$$y(x) = y(0)\, e^{\frac{1}{2}x^2} \equiv 0.$$