Přednáška 06b

Derivování integrálu

Nechť $f(x,s)$ je spojitá funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, která má parciální derivaci podle x rovněž spojitou. Potom funkce

$$F(a,b,x) = \int_a^b f(x,s)\,ds$$

je spojitá a její parciální derivace podle a, b a x jsou

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,x) = -f(x,a),$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,x) = f(x,b),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds.$$

Náznak důkazu:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b} f(x,s)\,ds - \int_a^b f(x,s)\,ds\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(-\int_a^{a+h} f(x,s)\,ds\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(-h\cdot f(x,a)\big) = -f(x,a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h,s)\,ds - \int_a^b f(x,s)\,ds\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cancel{\tfrac{1}{h}}\int_a^b \frac{f(x+h,s)-f(x,s)}{h}\,ds = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\,ds.$$

Lineární rovnice

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Homogenní lineární rovnici

$$u' = a(t)u$$

umíme vyřešit. Řešení je

$$\frac{u'}{u} = a(t)$$

$$u(t) = u(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

Proto nám stačí najít řešení rovnice

$$v' = a(t)v + b(t)$$

za podmínky $v(t_0) = 0$.

Pak $y(t) = u(t) + v(t)$

je řešení

$$y' = a(t)y + b(t)$$
$$y(t_0) = y_0 = u(t_0)$$

Stačí vzít

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} F(t,s)\, b(s)\, ds, \quad v(t_0) = 0$$

kde

$$F(t,s) = e^{\int_s^t a(x)\,dx}$$

Derivujme funkci v podle předchozí věty a věty o derivaci složené funkce

$$v'(t) = F(t,t)b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial t}(t,s)\, b(s)\, ds =$$

$$= b(t) + a(t) \int_{t_0}^{t} F(t,s)\, b(s)\, ds =$$

$$= a(t)\, v(t) + b(t).$$

Variace konstant

Řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = k \cdot \int_{t_0}^{t} e^{a(s)\,ds}$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(t) = k(t) \cdot u(t)$$

Pro $k(t)$ dostaneme

$$k'(t)\, u(t) + k(t)\, u'(t) = a(t)\, k(t)\, u(t) + b(t)$$

$$k'(t)\, u(t) + \underline{k(t)\, a(t)\, u(t)} = \underline{a(t)\, k(t)\, u(t)} + b(t)$$

$$k'(t) = \frac{b(t)}{u(t)}$$

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{u(s)}\, ds$$

Příklad $\quad y' = x - \dfrac{2y}{x^2+1}$

Variace konstant. Homogenní rovnice je

$$u' = -\frac{2u}{x^2+1}$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x^2+1}$$

$$\ln|u| = -\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln C, \qquad C \neq 0$$

$$\ln|u| = \ln\left|C\,\frac{x+1}{x-1}\right|, \qquad C \neq 0$$

$$u = C\,\frac{x+1}{x-1} \qquad C \neq 0$$

$u \equiv 0$ je rovněž řešení, tedy i pro $C = 0$ máme řešení. Hledáme

$$y(x) = C(x)\,\frac{x+1}{x-1}$$

$$y'(x) = \frac{C'(x)\,(x+1)(x-1) + C(x)(x-1) - C(x)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= x - \frac{2\,C(x)\,(x+1)}{(x-1)(x^2-1)}$$

Po úpravě

$$C'(x) = \frac{x\,(x-1)}{x+1}$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C$$

$$y(x) = C(x)\,\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + c\right)$$

Homogenní rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Provedeme substituci $z = \frac{y}{t}$. Potom z splňuje rovnici

$$z' = \left(\frac{y}{t}\right)' = \frac{1}{t^2}\left(y' \cdot t - y \cdot 1\right) = \frac{1}{t^2}\left(f\left(\frac{y}{t}\right) \cdot t - y \cdot 1\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(f(z) - z\right)$$

což je ~~[illegible]~~ rovnice se separovanými proměnnými.

Rovnice Bernoulliova typu

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^r \qquad r \neq 0 \text{ a } 1$$

Substituce $u(x) = y^{1-r}(x)$ dává

$$u'(x) = (1-r)\, y^{-r}(x)\, y'(x) =$$

$$= (1-r)\, y^{-r}(x)\, a(x)\, y + (1-r)\, y^{-r}(x)\, y^{r}(x)\, b(x)$$

$$= (1-r)\, u(x)\, a(x) + (1-r)\, b(x),$$

což je lineární rovnice.

Příklad

$$y' = \frac{y}{x} + 3xy^2, \quad x > 0$$

je Bernoulliova rovnice. Použijeme substituci

$$u(x) = \frac{1}{y(x)}$$

Pro u dostaneme rovnici

$$u'(x) = -\frac{u(x)}{x} - 3x$$

její řešení je

$$u(x) = e^{\ln \frac{1}{|x|}} \left[\int -3x\, e^{\ln|x|}\, dx \right]$$

primitivní funkce

$$u(x) = \frac{1}{|x|} \left[\int -3x\,|x|\, dx \right]$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \int -3x^2\, dx = \frac{1}{x}\left[-x^3 + C\right]$$

Návratem k původní proměnné dostaneme

$$y(x) = \frac{x}{C - x^3}$$

$y(x) \equiv 0$ je rovněž řešení.

Mějme zadánu počáteční podmínku

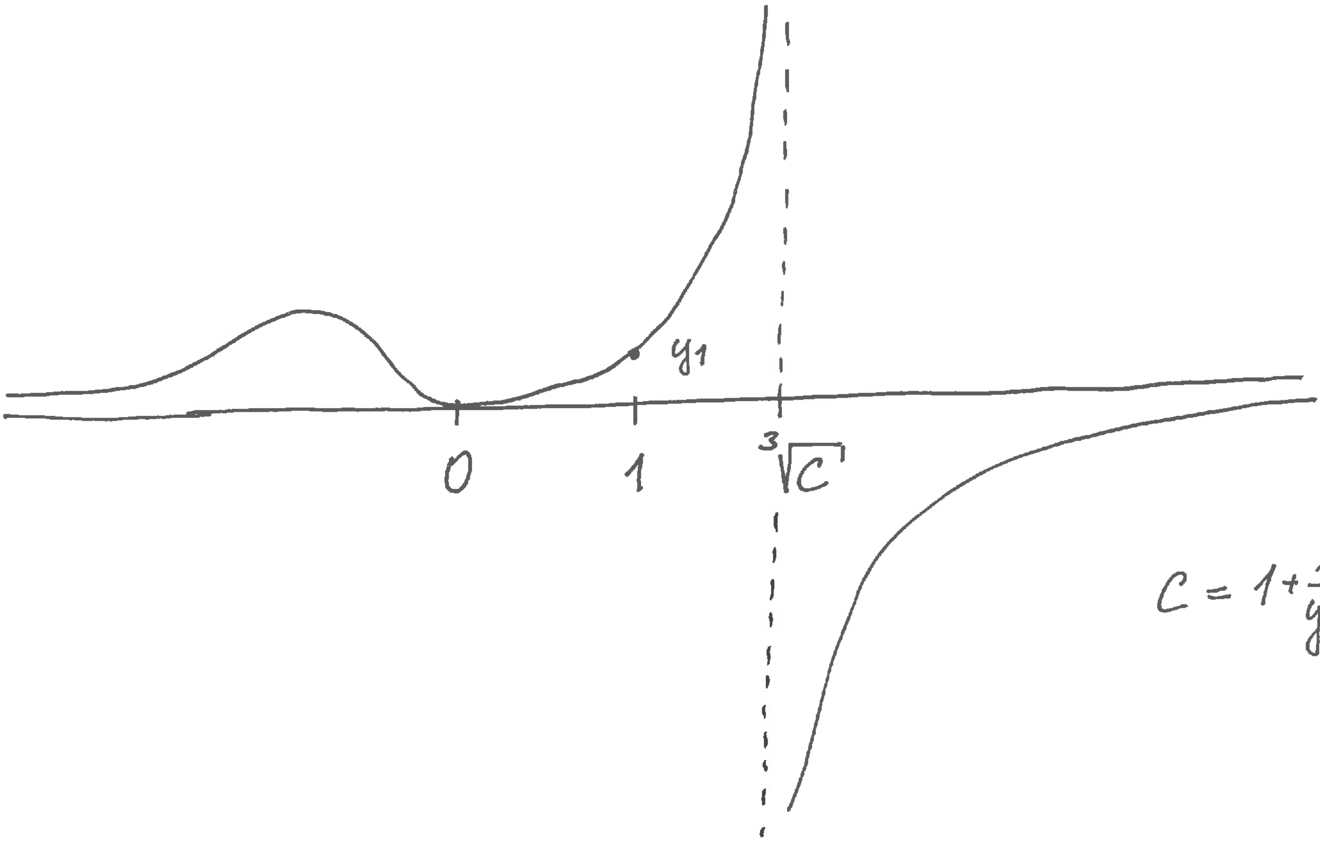
$y(1) = y_1$

je-li $y_1 = 0$, je řešení $y(x) \equiv 0$.

je-li $y_1 \neq 0$, je $\frac{1}{C-1} = y_1$, tedy $C = \frac{1}{y_1} + 1$

Předpokládejme $y_1 > 0$, pak $C > 1$. Řešení existuje na intervalu $(-\infty, \sqrt[3]{C})$.

$y(0) = 0$, $\lim_{x \to \sqrt[3]{C}_-} y(x) = \infty$.



$$C = 1 + \frac{1}{y_1}$$

<u>Věta o existenci a jednoznačnosti řešení</u>

Nechť funkce $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a pro každý konečný interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a $J \subseteq \mathbb{R}$ existuje konstanta C tak, že $\forall x \in I$, $\forall y, z \in J$ platí

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq C|y-z| .$$

Tento předpoklad je splněn, jestliže existuje $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, která je spojitá. Potom pro každou dvojici (x_0, y_0) existuje maximální interval $(x_0 - a, x_0 + b)$ a právě jedna funkce $y : (x_0 - a, x_0 + b)$ která je řešením dif. rovnice

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 .$$

Náznak důkazu

Platí
$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

Položme tedy
$$L(y)(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

L přiřazuje spojité funkci y spojitou funkci $L(y)$. y je řešením rovnice s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ právě když
$$L(y) = y.$$

Tedy y je pevný bod operátoru L. Ukážeme, že na dostatečně malém intervalu
$$[x_0 - c, x_0 + d]$$
je L kontrakce. Nechť y, z jsou spojité funkce na $[x_0 - c, x_0 + d]$. Pak
$$|L(y)(t) - L(z)(t)| = \left|\int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, z(t))\big)\,dt\right|$$
$$\le \int_{x_0}^{x} C|y(t) - z(t)|\,dt \le C(d + c) \max_{t \in [x_0 - c, x_0 + d]} |y(t) - z(t)|$$

Při volbě $\underline{c}$ a $\underline{d}$ takových, že $C(d + c) \le L < 1$

je $\|L(y) - L(z)\| \le L\|y - z\|$.

L je kontrakce a můžeme použít Banachovu větu o kontrakci.