Přednáška 07

Existence a jednoznačnost řešení

K existenci řešení rovnice

$$y' = f(x, y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

stačí spojitost funkce $f(x,y)$. Řešení nemusí být jednoznačné.

<u>Příklad</u>: $\quad y' = \sqrt{|y|}$

Separací proměnných získáme řešení

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+C)^2 & \text{pro } x+C \geq 0 \\ -\frac{1}{4}(x+C)^2 & \text{pro } x+C \leq 0 \end{cases}$$

Současně $\quad y(x) \equiv 0$ je řešení.

S počáteční podmínkou

$$y(x_0) = 0$$

máme na okolí x_0 více řešení

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-x_0)^2 & x \geq x_0 \\ -\frac{1}{4}(x-x_0)^2 & x \leq x_0 \end{cases}$$

$$y_2(x) \equiv 0$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq x_0 \\ \frac{1}{4}(x-x_0)^2 & \text{pro } x \geq x_0 \end{cases}$$

$$y_4(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-x_0)^2 & \text{pro } x \leq x_0 \\ 0 & \text{pro } x \geq x_0 \end{cases}$$

Soustavy diferenciálních rovnic

Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Hledáme funkci $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$x' = f(t, x(t))$$

Věta Nechť $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mají spojité parciální derivace. Pak pro každý bod $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ existuje maximální interval $[t_0 - a, t_0 + b]$ a právě jedna funkce $x : (t_0 - a, t_0 + b) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\
x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

s počáteční podmínkou

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 .$$

Příklad model Lotky a Voltera pro systém dravec - kořist. $x(t)$ velikost populace kořisti, $y(t)$ velikost populace dravců.

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha x - \beta y x \\
y' &= -\gamma y + \delta \beta x y
\end{aligned}
$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kladná čísla

Spojitá a diferencovatelná závislost na počátečních podmínkách a parametrech: Uvažujme rovnici

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Její řešení závisí na počátečních podmínkách t_0, x_0 i na parametru λ, tedy

$$x(t) = x(t, t_0, x_0, \lambda).$$

Je-li f spojitá v λ, pak $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ je rovněž spojitá. Je-li f diferencovatelná v λ a x, pak $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ má všechny parciální derivace.

Rovnice vyšších řádů

$$y^{(k)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$$

$$y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$$

lze převést na soustavu. Položíme-li

$$y(t) = x_0(t), \; y'(t) = x_1(t), \; y''(t) = x_2(t), \dots, y^{(k-1)} = x_{k-1}(t),$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x_0' &= x_1(t) \\ x_1' &= x_2(t) \\ &\;\vdots \\ x_{k-2}' &= x_{k-1}(t) \\ x_{k-1}' &= f(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \end{aligned}$$

Lineární rovnice vyšších řádů

Homogenní rovnice

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_0(t) y(t) = 0$$

Množina všech jejích řešení je nějaký podprostor s prostorem n-krát spojitě diferencovatelných funkcí $C^n(I)$, kde I je interval, na kterém jsou definovány funkce $\alpha_i(t)$. Tento podprostor má dimenzi n, neboť zobrazení

$$\text{počáteční podmínka} \longmapsto \text{řešení}$$
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow C^n(I)$$

je lineární a prosté.

<u>Nehomogenní lineární rovnice</u>

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_0(t)\, y(t) = f(t)$$

Množina řešení je afinní podprostor v $C^n(I)$ dimenze n. Každé řešení je tvaru

partikulární řešení + řešení homogenní rovnice

<u>Lineární dif. rovnice s konstantními koeficienty</u>

Soustavy
$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$
kde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a A je matice $n \times n$.

Je-li λ_0 vlastní čísla matice A s vlastním vektorem v_0, pak
$$x(t) = e^{\lambda_0 t} v_0$$
je řešením soustavy s počáteční podmínkou
$$x(0) = v_0,$$
neboť

$$x'(t) = (e^{\lambda_0 t} v_0)' = \lambda_0 e^{\lambda_0 t} v_0 = A e^{\lambda_0 t} v_0 = A x(t).$$

Existuje-li tedy v $\mathbb{R}^n$ báze tvořená vlastními vektory matice A, pak obecné řešení je tvaru

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla s odpovídajícími vlastními vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$. $c_1, c_2, \dots c_n$ jsou konstanty.

Jestliže vlastní vektory matice A netvoří bázi $\mathbb{R}^n$, musíme k řešení soustavy použít Jordanův kanonický tvar matice A.

Lin. dif. rovnice vyšších řádů s konst. koeficienty

$$a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_0 y = 0 \qquad a_k \neq 0.$$

Řešení této rovnice hledáme ve tvaru $e^{\lambda t}$.

Dosazením dostáváme

$$a_k \lambda^k e^{\lambda t} + a_{k-1} \lambda^{k-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

Tedy λ musí být kořenem polynomu

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Má-li polynom k různých kořenů, dostáváme k lineárně nezávislých řešení a obecné řešení je $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_k e^{\lambda_k t}$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou příslušné kořeny.

Jsou-li $a_k, a_{k-1}, \dots a_0$ reálná čísla a $\lambda = \alpha + i\beta$ je komplexní kořen, pak i čísla komplexně sdružené $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ je ~~komplexně sdruženým~~ kořenem polynomu. Dostáváme komplexní řešení

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

jejich vhodnou lineární kombinací dostaneme reálná řešení

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}\right)$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}\right)$$

Je-li λ kořen násobnosti i, pak má příslušná dif. rovnice řešení

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{i-1}e^{\lambda t}.$$

Dosadíme $te^{\lambda t}$ do ~~[illegible]~~ levé strany rovnice. Dostaneme

$$a_k\,(te^{\lambda t})^{(k)} + a_{k-1}\,(te^{\lambda t})^{(k-1)} + \dots + a_1(te^{\lambda t})' + a_0 te^{\lambda t}$$

$$= a_k \left(t \cdot (e^{\lambda t})^{(k)} + k t' (e^{\lambda t})^{(k-1)} \right) +$$

$$a_{k-1} \left(t \cdot (e^{\lambda t})^{(k-1)} + (k-1) t' (e^{\lambda t})^{(k-2)} \right) +$$

$$+ \cdots\cdots + a_0 t e^{\lambda t} =$$

$$= a_k \left(t \cdot \lambda^k e^{\lambda t} + k \lambda^{k-1} e^{\lambda t} \right) +$$

$$a_{k-1} \left(t \, \lambda^{k-1} e^{\lambda t} + (k-1) \lambda^{k-2} e^{\lambda t} \right) +$$

$$+ \cdots + a_0 t e^{\lambda t} =$$

$$= t e^{\lambda t} \left(a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \right)$$

$$+ e^{\lambda t} \left(k a_k \lambda^{k-1} + (k-1) a_{k-1} \lambda^{k-2} + \cdots + a_1 \right)$$

je-li λ dvojnásobným kořenem polynomu

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0,$$

je rovněž kořenem jeho derivace

$$p'(\lambda) = k a_k \lambda^{k-1} + (k-1) a_{k-1} \lambda^{k-2} + \cdots a_1 .$$

Tedy $x(t) = t e^{\lambda t}$ je řešením diferenciální rovnice.

<u>Příklad 1</u> $\quad y''' - 5y'' - 8y' + 48y = 0$

Rovnice $\quad \lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 48 = 0$

má řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -3$.

Obecné řešení je tedy

$$c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} + c_3 e^{-3t}$$

<u>Příklad 2</u> nehomogenní lin. dif. rovnice

$$y''' + y'' + 9y' + 9y = e^x + 10\cos 3x$$

Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9$ má kořeny

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 3i, \ \lambda_3 = -3i$$

Řešení homogenní rovnice je proto

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

Je-li pravá strana tvaru

$$P_n(x)\, e^{\alpha x}, \qquad P_n \text{ polynom st. } n,$$

hledáme řešení ve tvaru

$$x^k R_n(x)\, e^{\alpha x},$$

kde k je násobnost α jako kořene příslušného polynomu, R_n je polynom st $\leq n$.

Aplikujeme na pravou stranu e^x. Partikulární řešení je

$$y_1(x) = Ae^x$$

Dosazením do rovnice s pravou stranou e^x dostaneme

$$20Ae^x = e^x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}.$$

Je-li pravá strana ve tvaru

$$e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos \beta x + S_n(x)\sin \beta(x)\right],$$

existuje partikulární řešení ve tvaru

$$x^k e^{\alpha x}\left[R_\ell(x)\cos \beta x + T_\ell(x)\sin \beta(x)\right],$$

kde k je násobnost $\alpha + i\beta$ jako kořene polynomu, a R_e, T_e jsou polynomy stupně nejvýše

$$l = \max\{m, n\}$$

Pro pravou stranu $10\cos 3x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_2(x) = x\,(B\cos 3x + C\sin 3x)$$

Dosazením do rovnice s pravou stranou $10\cos 3x$ dostaneme

$$-18B\cos 3x - 18C\sin 3x - 6B\sin 3x + 6C\cos 3x = 10\cos 3x$$

Odtud

$$-18B + 6C = 10$$
$$-18C - 6B = 0$$

Řešení je $\quad B = -1/2, \quad C = 1/6$

$$y_2(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{6}\sin 3x\right)$$

Obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x + \frac{1}{20}e^x - \frac{1}{2}x\cos 3x + \frac{1}{6}x\sin 3x$$

<u>Příklad 3</u> Pravá strana jiného typu

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1} = f(x)$$

Řešení hledáme variací konstant ve tvaru

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

kde y_1 a y_2 jsou řešení (lin. nezávislá) homogenní rovnice. Pro $C_1(x)$ a $C_2(x)$ chceme, aby

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

V našem případě $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$, soustava pro $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$ je

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0$$

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)\left[e^x + xe^x\right] = \frac{e^x}{x^2+1}$$

Aplikací Cramerova pravidla dostaneme

$$C_1'(x) = -\frac{x}{x^2+1} \qquad C_1(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad C_2(x) = \operatorname{arctg} x + C_2$$

Obecné řešení je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2+1) + x e^x \operatorname{arctg} x.$$