Přednáška 12 b

F - rozdělení

Odvodíme další užitečné rozdělení.

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotami f_X a f_Y. Přitom $f_Y > 0$ pouze na $(0,\infty)$. Odvodíme hustotu náhodné veličiny

$$U = c\,\frac{X}{Y}$$

Pro distribuční funkci U platí

$$F_U(u) = P(U \le u) = P\left(X < \frac{u}{c} Y\right) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\frac{uy}{c}} f_X(t)\,dt \right) f_Y(y)\,dy =$$

$t = \frac{zy}{c}$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{u} f_X\left(\frac{zy}{c}\right) \frac{y}{c}\,dz \right) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{c} \left(\int_0^\infty y\, f_X\left(\frac{zy}{c}\right) f_Y(y)\,dy \right) dz$$

Hustotu veličiny U získáme derivováním posledního integrálu podle u :

$$f_U(u) = \frac{1}{c}\int_0^\infty y\, f_X\!\left(\frac{uy}{c}\right) f_Y(y)\, dy$$

<u>F-rozdělení</u> (Fisherovo - Snedecorovo) <u>s k a m stupni volnosti</u> je rozdělení náhodné veličiny

$$U = \frac{X/k}{Y/m},$$

kde $X \sim \chi^2(k)$ a $Y \sim \chi^2(m)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Když budeme aplikovat předchozí, dostaneme

$$f_U(u) = \frac{(k/m)^{k/2}\, u^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k+m}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \underbrace{y^{\frac{k+m}{2}-1}\cdot e^{-\frac{(1+ku/m)\,y}{2}}}_{\text{hustota rozdělení } \Gamma\left(\frac{k+m}{2},\, 1+\frac{ku}{m}\right) \text{ až na násobek}}\, dy$$

$\left(1+\frac{k\cdot u}{m}\right)$

$$= \frac{\Gamma\!\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma(k/2)\,\Gamma(m/2)} \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}} u^{\frac{k}{2}-1} \left(1+\frac{ku}{m}\right)^{-\frac{k+m}{2}}$$

Dva nezávislé výběry z normálního rozložení

Nechť $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1}$ je náhodný výběr rozsahu m z rozdělení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n2}$ je náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, přičemž $m, n \geq 2$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry a S_1^2, S_2^2 výběrové rozptyly. Dále nechť je

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

vážený průměr výběrových rozptylů.

Věta Za výše uvedených předpokladů platí

- $M_1 - M_2$ a S_*^2 jsou stochasticky nezávislé
- $M_1 - M_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$
- je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak
  $$K = \frac{(m+n-2)S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$
- $$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

(1) Statistika

$$U = \frac{M_1 - M_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

se používá pro odhad $\mu_1 - \mu_2$, známe-li σ_1^2 a σ_2^2.

(2) Je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak se statistika

$$K = \frac{(m+n-2)\, S_*^2}{\sigma_2^2}$$

používá k odhadu společného rozptylu.

(3) Statistika

$$F = \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2}$$

slouží k odhadu podílu rozptylů σ_1^2/σ_2^2.

<u>Příklad</u> Mějme dva nezávislé náhodné výběry; první rozsahu 10 z rozdělení $N(2;\, 1{,}5)$ a druhý rozsahu 5 z rozdělení $N(3;4)$. Určete pravděpodobnost, že výběrový průměr prvního výběru bude menší

než výběrový průměr druhého výběru.

<u>Řešení:</u>

$$P(M_1 < M_2) = P(M_1 - M_2 < 0) =$$

$$= P\left(\frac{(M_1 - M_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} < \frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \right)$$

$$= P\left(U < \frac{-2+3}{\sqrt{\frac{1{,}5}{10} + \frac{4}{5}}} \right) = P(U < 1{,}05)$$

$$= \Phi(1{,}05) = 0{,}853. \quad \blacksquare$$

<u>Intervaly spolehlivosti $1-\alpha$ pro parametry 2 normálních rozdělení</u>

$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)

$$\left(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}},\ M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$\mu_1 - \mu_2$ (neznáme σ_1^2, σ_2^2, ale víme, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$\left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2),\right.$$

$$\left. M_1 - M_2 + S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \right)$$

Společný rozptyl σ^2

$$\left(\frac{(m+n-2)\,S_*^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)} \,,\, \frac{(m+n-2)\,S_*^2}{\chi^2_{\alpha/2}(m+n-2)} \right)$$

Podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)} \,,\, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \right)$$

<u>Poznámka</u> Pokud a priori nevíme, že rozptyly jsou stejné, můžeme to ověřit tak, že nejprve sestrojíme interval spolehlivosti pro σ_1^2/σ_2^2. Obsahuje-li 1, pak s pravděpodobností $1-\alpha$ je $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ a rozdíl $\mu_1-\mu_2$ můžeme odhadovat podle 2. řádku tabulky.

Příklad

Zkouška z předmětu MB103 měla skupinu A a B. Výsledky studentů považujeme za dva nezávislé výběry z normálního rozdělení. Úkolem je zjistit, zda výsledky některé ze skupin byly statisticky významně horší.

Základní statistiky jsou

	rozsah	výb. průměr	výb. rozptyl
A	65	10,48	22,49
B	64	7,21	29,75

$S_1^2/S_2^2 = 0{,}76$

95% interval spolehlivosti pro σ_1^2/σ_2^2 je

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)} , \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)} \right) \approx (0{,}46 , 1{,}24)$$

$\alpha = 0{,}05$, $m = 65$, $n = 64$, $F(0{,}025; 64; 63) = 0{,}61$

Protože $1 \in (0{,}46 ; 1{,}24)$, budeme pracovat s předpokladem, že obě rozdělení mají stejný rozptyl. Spočítáme

$$S_*^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2} \approx (5{,}11)^2$$

Dále $M_1 - M_2 = 3{,}27$. 95% interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$ je

$$\left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2),\ M_1 - M_2 + S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right)$$

$$\approx (1{,}49;\ 5{,}05) \qquad 0 \notin (1{,}49;\ 5{,}05)$$

$$t_{0{,}975}(65+64-2) = 1{,}98$$

Tedy statisticky významně není $\mu_1 = \mu_2$. ∎

Šlo o příklad na testování hypotézy $\mu_1 = \mu_2$.

TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

Hypotézou rozumíme nějaké tvrzení o parametrech rozdělení, a které ověřujeme prostřednictvím náhodného výběru. — Actually: "a které děláme náhodný výběr."

H_0 – nulová hypotéza, např. $\theta = c$, kde c vyjadřuje naši domněnku o hodnotě parametru θ.

H_1 – oboustranná alternativní hypotéza, obvykle $\theta \neq c$

Testování H_0 proti alternativní hypotéze je postup založený na náhodném výběru, o jehož pomocí platnost H_0 zamítneme nebo nezamítneme (= připouštíme).

Chyba 1. druhu ... H_0 platí a my ji zamítneme

Chyba 2. druhu ... H_0 neplatí a my ji nezamítneme

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se nazývá hladina významnosti α (obvykle $\alpha = 0{,}05$), pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β a číslo $1-\beta$ se nazývá síla testu.

<u>Způsoby testování nulové hypotézy ($\theta = c$)</u>

(1) <u>Pomocí intervalu spolehlivosti</u>

Na základě realizace náhodného výběru sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámý parametr θ a zjistíme, zda c patří do tohoto intervalu. Pokud ano, hypotézu H_0 nezamítneme, pokud ne, hypotézu H_0 zamítneme na hladině významnosti α. To jsme dělali v předchozím příkladu.

(2) Pomocí kritického oboru

Zvolíme vhodnou statistiku T, $ET=\theta$.
Množinu hodnot, které může T nabývat rozdělíme na dvě disjunktní množiny
obor nezamítnutí H_0 .... podmnožina V
kritický obor .... podmnožina W
"
obor zamítnutí H_0

Pokud realizace T padne do W, hypotézu H_0 zamítneme, pokud do V, hypotézu H_0 nezamítáme.

Stanovení kritického oboru na hladině α
Nechť $F^{-1}(x)$ je x-kvantil po distribuční funkci statistiky T. Pak

$$V = \left[F^{-1}(\alpha/2),\ F^{-1}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$W = \left(-\infty, F^{-1}(\alpha/2)\right) \cup \left(F^{-1}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$$

(3) Pomocí p-hodnoty

p-hodnota udává nejmenší možnou hladinu významnosti, při níž H_0 zamítáme. Je-li p-hodnota $< \alpha$, hypotézu H_0 zamítneme, pro p-hodnotu $> \alpha$, hypotézu H_0 nezamítneme.

p-hodnota se stanoví pomocí konkrétní realizace t_0 statistiky T náhodného výběru jako

$$p = 2 \min \{ P(T \le t_0), P(T \ge t_0) \}$$

<u>Testování proti jednostranné alternativní hypotéze.</u>

H_0 je hypotéza $\theta = c$

levostranná alt. hypotéza je $\theta < c$.

pravostranná alt. hypotéza je $\theta > c$.

<u>Příklad</u> Studenti psali písemku rozděleni do dvou skupin A a B. Hypotéza H_0 ... obě písemky mají stejnou obtížnost je testována proti oboustranné alternativní hypotéze: „zadání nejsou stejně obtížná".

<u>Příklad</u> Studenti psali písemku v roce 2008 bez předchozích DU, v roce 2009 s předchozími DU. H_0 ... výsledky jsou stejné

jednostranná alternativa ... výsledek se zlepšil.

<u>Příklad</u> Při házení kostkou 60× padla 6 celkem 16 krát. Testujeme na hladině významnosti nulovou hypotézu

H_0 : kostka není upravená

oproti jednostranné hypotéze H_1:

kostka je upravená tak, aby padala víc šestek.

<u>Řešení</u>: Statistika $T \sim Bi(60, 1/6)$

Kritický obor je dán 95. percentilem tohoto rozdělení. Vypočteme

$$P(T>14) = 0{,}065 \quad , \quad P(T>15) = 0{,}034 .$$

~~Proto je p-hodnota rovna~~ Proto je kritickým oborem na hladině významnosti 0,05 interval $[16, \infty)$. Protože $16 \in [16, \infty)$, hypotézu H_0 zamítneme – na hladině významnosti můžeme tvrdit, že kostka je upravená.

Rovněž v tomto případě je p-hodnota $= 0{,}034$.

Protože $\alpha > 0{,}034$, hypotézu H_0 zamítneme.

Řešení pomocí Moivreovy – Laplaceovy věty.

$$X = \frac{T - 10}{\sqrt{50/6}}$$

lze aproximovat normálním rozdělením $N(0,1)$. Testujeme hypotézu $\mu = 0$.

<u>Kritický obor</u> $N(0,1)$ je interval

$$(z_{0{,}95}, \infty) = (1{,}65, \infty)$$

Při realizaci statistiky X dostaneme

$$x = \frac{16-10}{\sqrt{50/6}} \approx 2{,}08$$

a nulovou hypotézu opět zamítneme neboť $2{,}08 \in (1{,}65; \infty)$.

<u>Jednostranný interval spolehlivosti</u> 0,95 je

$$\left(\frac{2{,}08 - 1{,}65}{\sqrt{60}}, \infty \right)$$

a protože do něj nepatří 0 zamítáme nulovou hypotézu.

<u>p-hodnota</u> – najdeme nejmenší pravděpodobnost p, při níž stále jistě zamítneme nulovou hypotézu $\mu = 0$ proti pravostranné

hypotéze $\mu > 0$. Má-li X rozdělení $N(0,1)$ a realizaci $X = 2{,}08$, pak

$$p = P(X \geq 2{,}08) = 1 - 0{,}981 = 0{,}019.$$

Protože $\alpha = 0{,}05 > 0{,}019 = p$, můžeme nulovou hypotézu zamítnout.