Přednáška 13

Řešení úloh ze cvičení 13

Příklad 4 Průměrná rychlost větru na určitém místě je 20 km/hod.

(a) Bez ohledu na rozdělení rychlosti větru jako náhodné veličiny odhadněte pravděpodobnost, že při jednom pozorování rychlost větru nepřekročí 60 km/hod.

(b) Určete interval, v němž bude rychlost větru s pravděpodobností aspoň 0,9, jestliže směrodatná odchylka je $\sigma = 1$ km/hod.

Řešení (a) Použijeme Markovovu nerovnost pro nezáporné náhodné veličiny:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

$$P(X \leq 60) = 1 - P(X > 60) \geq 1 - \frac{20}{60} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

(b) Použijeme Čebyševovu nerovnost

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X - 20| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} = 0{,}9$$

Tedy $\varepsilon^2 = 10$ $\quad \varepsilon = \sqrt{10} \doteq 3{,}2$

Interval je $[20 - 3{,}2;\ 20 + 3{,}2] = [16{,}8\ ;\ 23{,}2]$.

Příklad 6 Dokažte, že pro kvantily normálního rozdělení platí vztah

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} .$$

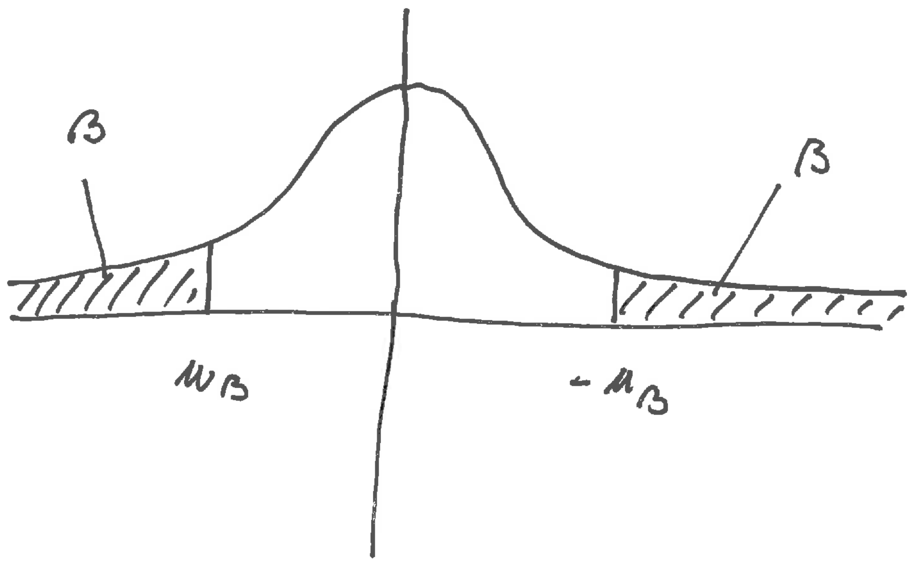
Nechť $\beta \leq \frac{1}{2}$. Pak pro hustotu norm. rozdělení, která je sudá funkce, platí

$$\beta = \int_{-\infty}^{u_\beta} f(x)dx = \int_{-u_\beta}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{-u_\beta} f(x)dx$$

Proto $$\int_{-\infty}^{-u_\beta} f(x)dx = 1-\beta$$

tedy $$u_{1-\beta} = -u_\beta$$



Příklad 8 Pravděpodobnost, že semeno vyklíčí je 0,9. Kolik semen je potřeba zasadit, aby s pravděpodobností aspoň 0,995 ~~vyk~~ odchylka podílu vyklíčených semen od 0,9 nepřesáhla 0,034.

Řešení: X_i ... náhodná veličina s alt. rozdělením

$X_i = 0$ semeno nevyklíčilo $\quad p = 0{,}1$

$X_i = 1$ semeno vyklíčilo $\quad p = 0{,}9$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ náhodná veličina počet vyklíčených semen s rozdělením $Bi(n, n \cdot 0{,}9)$

Hledáme n takové, že

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - 0{,}9n\right| \leq 0{,}034n\right) \geq 0{,}995$$

$$P\left(\left|\frac{\sum X_i - 0{,}9n}{\sqrt{n\, 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right| \leq \frac{0{,}034\sqrt{n}}{0{,}3}\right) \geq 0{,}995$$

Aproximujeme normálním rozdělením s distribuční funkcí Φ

$$\Phi\left(\frac{0{,}034\sqrt{n}}{0{,}3}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}034\sqrt{n}}{0{,}3}\right) \geq 0{,}995$$

$$2\,\Phi\left(\frac{0{,}034\sqrt{n}}{0{,}3}\right) - 1 \geq 0{,}995$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}34\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0{,}9975$$

$$\frac{0{,}34\sqrt{n}}{3} \geq z_{0{,}9975} = 2{,}81$$

$$\sqrt{n} \geq 24{,}79$$

$$\underline{n \geq 615}$$

∎

<u>Příklad 10</u> Při 600 hodech kostkou padla jednička 45 krát. Rozhodněte, zda je možné, že jde o ideální kostku na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$.
Vše zdůvodněte, záměr explicitně formulujte.

<u>Řešení</u> X_i i-tý hod padne 1 $X_i = 1$
nepadne 1 $X_i = 0$

$p(X_i = 1) = \frac{1}{6}$.

$X = \sum_{i=1}^{600} X_i$ je náhodná veličina s binomickým rozdělením $Bi\left(600, \frac{1}{6}\right)$, střední hodnotou $\mu = 1000$ a rozptylem $\sigma^2 = np(1-p) = 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{250}{3}$.

$$\frac{X - 100}{\sqrt{\frac{250}{3}}}$$ má rozložení blízké $N(0,1)$.

Výsledek 45 lze brát jako jednoznačný výběr z binomického rozložení $Bi(600, \frac{1}{6})$ nebo z normálního rozložení

$$N\left(100, \frac{250}{3}\right).$$

Pro tento výběr je 99% interval spolehlivosti $(X_1 = 45,\ M = X_1 = 45)$

$$\left(45 - \sigma \cdot z_{0,995};\ 45 + \sigma \cdot z_{0,995}\right)$$

$$= \left(45 - \sqrt{\frac{250}{3}} \cdot 2{,}58;\ 45 + \sqrt{\frac{250}{3}} \cdot 2{,}58\right)$$

$$\doteq (21{,}45;\ 68{,}55).$$

Protože $100 \notin (21{,}45;\ 68{,}55)$ lze s pravděpodobností aspoň 99% usoudit, že nejde o ideální kostku. ∎

<u>Příklad 11</u> Do bedny skládáme výrobky se střední hodnotou 3 kg a směrodatnou odchylkou 0,8 kg. Jaký maximální počet výrobků můžeme vložit do bedny, aby celková hmotnost bedny nepřesáhla 1 tunu s pravděpodobností 0,9738.

Řešení: Předpokládáme buď $X_i \sim N(3;\, 0{,}64)$ nebo že třetí moment X_i je stejnoměrně omezený, abychom mohli použít centrální limitní větu:

Distr. fce $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 3n}{\sqrt{n}\; 0{,}8}$ se blíží $N(0,1)$.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1000\right) = 0{,}9738$$

$$P\left(\frac{\sum X_i - 3n}{\sqrt{n}\; 0{,}8} \leq \frac{1000 - 3n}{\sqrt{n}\; 0{,}8}\right) = 0{,}9738$$

$$\Phi\left(\frac{1000}{\sqrt{n}} - \frac{3}{0{,}8}\sqrt{n}\right) = 0{,}9738$$

$$\frac{1000}{\sqrt{n}} - \frac{3}{0{,}8}\sqrt{n} = z_{0{,}9738} = 1{,}94$$

$$1000 - \frac{3}{0{,}8}\, n = 1{,}94\sqrt{n}$$

$$\frac{3}{0{,}8}\, n + 1{,}94\sqrt{n} - 1000 = 0$$

$$\sqrt{n} = \frac{-1{,}94 \pm \sqrt{1{,}94^2 + 4 \cdot 1000 \cdot \frac{3}{0{,}8}}}{2 \cdot \frac{3}{0{,}8}}$$

$$\doteq 16{,}07$$

$$\boxed{n \geq 259}$$

Příklad 19 Na šachový turnaj má být vybrán jeden zástupce ze dvou oddílových šachistů, a to ten, jehož výkon je stabilnější (má menší rozptyl). Procentuální úspěšnost v posledních turnajích je:

A	49,6	59,4	59,5	76,8	69,4	70,9	68,1	66,3
B	38,5	51,2	79,5	72,3	86,5			

$\sum_{1}^{8} X_{iA} = 520$ $M_A = 65$

$\sum_{1}^{5} X_{jB} = 328$ $M_B = 65{,}6$

$7 \cdot S_A^2 = 503{,}48$ $S_A^2 = 71{,}93$

$4 \cdot S_B^2 = 1616{,}68$ $S_B^2 = 404{,}17$

Testujeme nulovou hypotézu $\sigma_A^2/\sigma_B^2 = 1$ oproti jednostranné hypotéze $\sigma_A^2/\sigma_B^2 < 1$ na hladině významnosti 5%.

Jednostranný interval spolehlivosti pro tento test je

$$\left(0;\ \frac{S_A^2/S_B^2}{F_{0,05}(7,4)}\right) = (0;\ 0{,}178 \cdot 4{,}120)$$

$$= (0;\ 0{,}733)$$

Protože $1 \notin (0; 0{,}733)$,

na hladině významnosti 5% můžeme tvrdit, že $\sigma_A^2/\sigma_B^2 < 1$. Tedy na turnaj pošleme hráče A.

Na hladině významnosti 2,5% to však tvrdit nelze. Jednostranný interval spolehlivosti je

$$\left(0; \frac{s_A^2/s_B^2}{F_{0,025}(7,4)}\right) = (0; 0{,}178 \cdot 9{,}074)$$

$$= (0; 1{,}614).$$ ■

<u>Příklad 17</u> Z velkého souboru rezistorů vybereme 16 kusů s výběrovým průměrem odporu 9,3 kΩ. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výběr pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 10\,k\Omega$ za předpokladu, že

(a) $\sigma^2 = 4(k\Omega)^2$

(b) σ^2 není známo a $s^2 = 6{,}25(k\Omega)^2$

Řešení (a) Oboustranný interval spolehlivosti je

$$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0{,}975} ,\ M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0{,}975} \right)$$

$$= \left(9{,}3 - \frac{1}{2} 1{,}96 ,\ 9{,}3 + \frac{1}{2} 1{,}96 \right) =$$

$$= (8{,}34;\ 10{,}26) .$$

Protože $1 \in (8{,}34 ;\ 10{,}26)$ hypotézu $\mu = 10$ nezamítneme.

Řešení (b) V tomto případě je oboustranný interval spolehlivosti

$$\left(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0{,}975} ,\ M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0{,}975} \right)$$

$$= \left(9{,}3 - \frac{2{,}5}{4} \cdot 2{,}13 ,\ M + \frac{2{,}5}{4} \cdot 2{,}13 \right)$$

$$= (9{,}3 - 1{,}33 ;\ 9{,}3 + 1{,}33) = (7{,}97 ;\ 10{,}63)$$

Protože $10 \in (7{,}97 ;\ 10{,}63)$, hypotézu $\mu = 10$ nezamítneme.

Příklad 18 Na dvou soustruzích se vyrábějí stejné výrobky. Měříme vnitřní průměr.

	počet vzorků	výb. průměr	výb. rozptyl
1. soustruh	16	37,5	1,21
2. soustruh	25	36,8	1,44

Testujeme hypotézu o rovnosti středních hodnot u obou strojů oproti oboustranné alternativě na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$.

Řešení Můžeme předpokládat $\sigma_1 = \sigma_2$?

Testujeme hypotézu $\sigma_1 = \sigma_2$ oproti $\sigma_1 \neq \sigma_2$ na hladině významnosti 0,05.

Oboustranný interval spolehlivosti je

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0,975}(15,24)} , \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0,025}(15,24)} \right)$$

$$= \left(\frac{0{,}84}{2{,}701} , \frac{0{,}84}{\frac{1}{2{,}701}} \right) = (0{,}31 ; 2{,}28)$$

Protože $1 \in (0{,}31 ; 2{,}28)$, budeme předpokládat, že $\sigma_1 = \sigma_2$. Pak oboustranný odhad pro $\mu_1 - \mu_2$ je

$$\left(M_1 - M_2 - S_* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \cdot t_{0,995}(39), M_1 - M_2 + \dots \right)$$

$$= \left(0{,}7 - 37{,}07 \cdot 0{,}33 \cdot t_{0{,}995}(39);\ 07 + 37{,}07 \cdot 0{,}33 \cdot t_{0{,}995}(39)\right)$$

$$= \left(0{,}7 - 12{,}20 \cdot 2{,}704;\quad 0{,}7 - 12{,}20 \cdot 2{,}704\right)$$

$$= \left(0{,}7 - 32{,}99,\quad 0{,}7 + 32{,}99\right) = \left(-32{,}29;\ 33{,}69\right)$$

Hypotézu $\mu_1 = \mu_2$ nezamítneme.