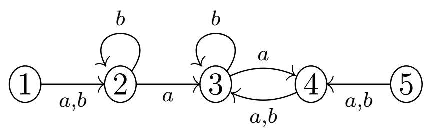
Algebra I – podzim 2019 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Uvažujme okruh $(\{\, (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2 \text{ dělí } a+b \,\}, \oplus, *)$ s jedničkou $(-1,1)$, kde $\oplus$ a $*$ jsou operace definované předpisy
$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d),$$
$$(a,b) * (c,d) = \left(\frac{-5ac - ad - bc - bd}{4}, \frac{ac + ad + bc + 5bd}{4} \right).$$
Rozhodněte, zda tento okruh je tělesem a zda množina
$$\{\, (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \text{ dělí } a+b \,\}$$
je jeho podokruhem.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((\mathbb{Z},+) \times (G,\cdot)\big)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ f & 2^p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{R}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \left(-p, \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ f & 2^p \end{pmatrix} \right) \mid p \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{R}[x],\ f(2) = f(0) \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^5 + \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 + 1}$$
bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^4 + 2\alpha^3 = 2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad tělesa, které má právě dvě podtělesa.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad neinjektivního homomorfismu grup $\varphi\colon G \to G$ takového, že $\ker(\varphi) \cong \varphi(G)$ a současně $\ker(\varphi) \cap \varphi(G) = \{1_G\}$.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh a jeho charakteristiku.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. **(10 bodů)** Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.