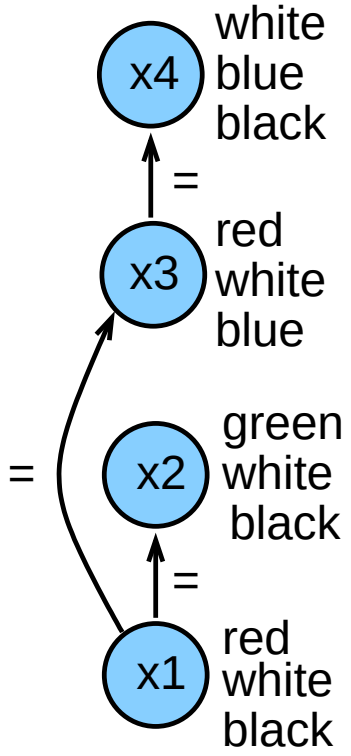
Směrová konzistence

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

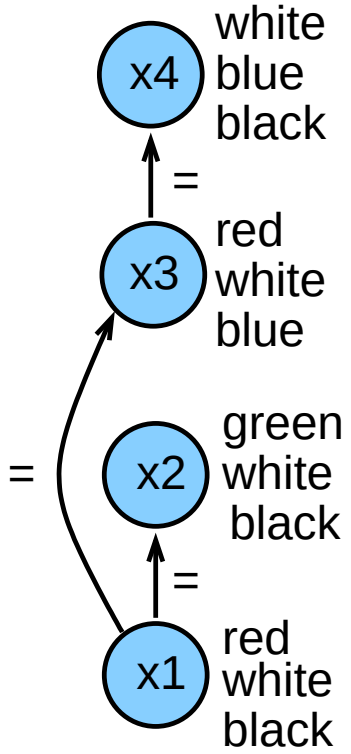
    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

      revise $((j, i))$

  end DAC

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

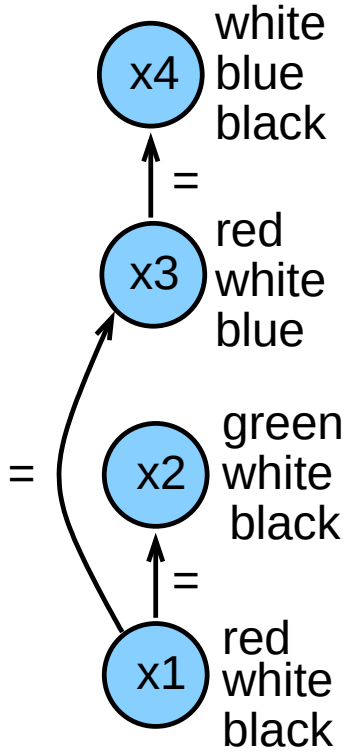
      revise $((j, i))$

  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC:

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

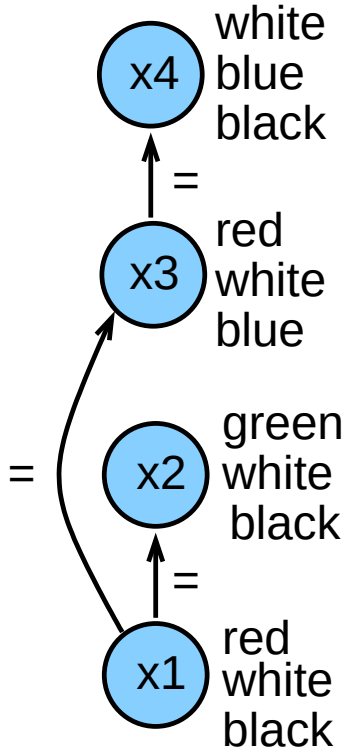
      revise $((j, i))$

  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black},

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

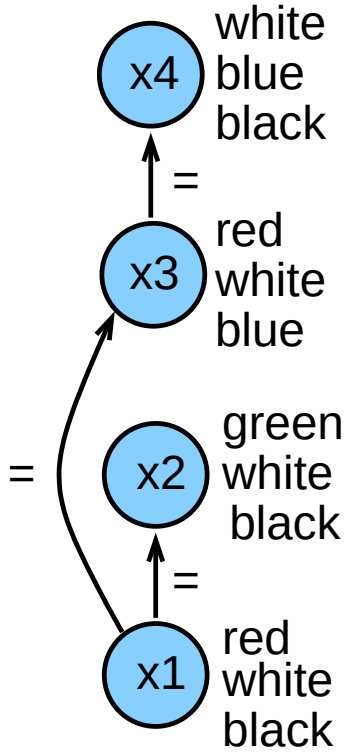
      revise $((j, i))$

  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue},

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

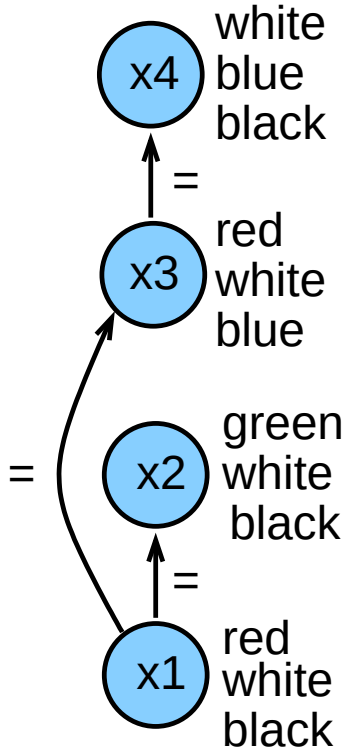
      revise $((j, i))$

  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black},

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

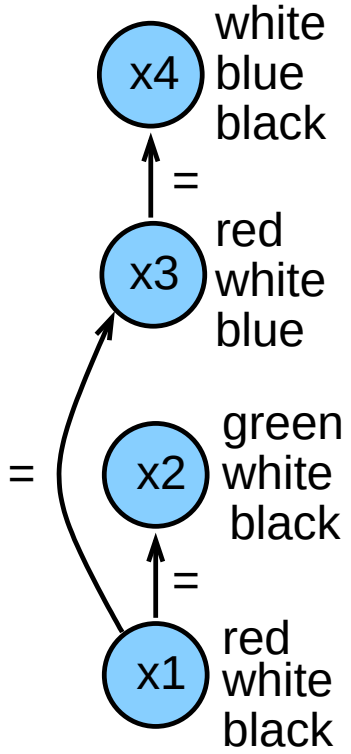
      revise $((j, i))$

  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.

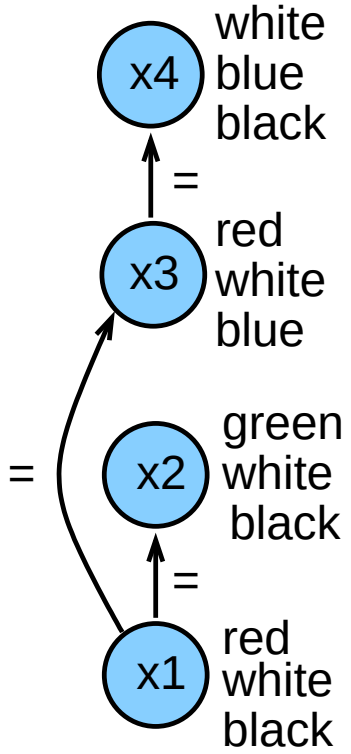


- procedure
  DAC(G,$(x_1,\ldots,x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***
  for $i = n$ to 1 by -1 do
    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do
      revise $((j,i))$
  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},
    není AC, ale máme řešení bez navracení vzhledem k

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure

  DAC(G, $(x_1, \ldots, x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***

  for $i = n$ to 1 by -1 do

    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do

      revise $((j, i))$

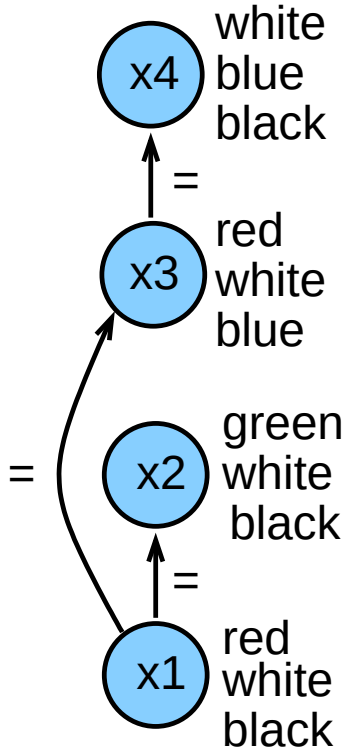
  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},

    není AC, ale máme řešení bez navracení vzhledem k (x_1, x_2, x_3, x_4)

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



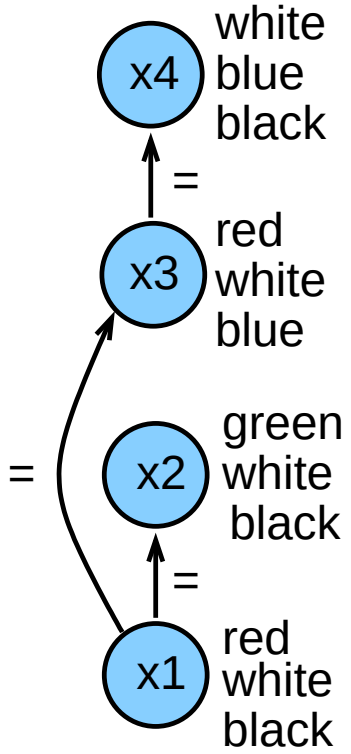
- procedure
  DAC(G,$(x_1,\ldots,x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***
  for $i = n$ to 1 by -1 do
    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do
      revise $((j,i))$
  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},
    není AC, ale máme řešení bez navracení vzhledem k (x_1, x_2, x_3, x_4)

- Opakování revizí není nutné,

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



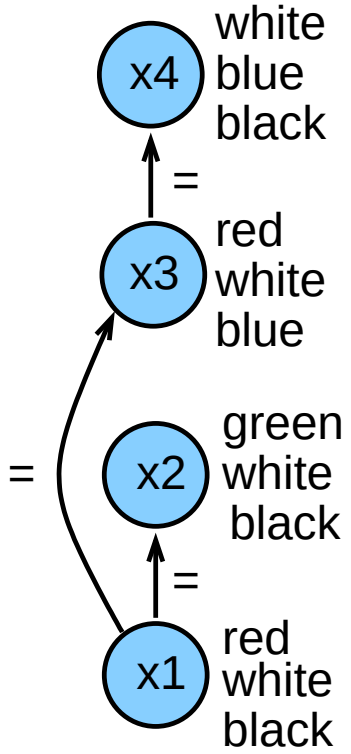
- procedure
  DAC(G,$(x_1,\ldots,x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***
  for $i = n$ to 1 by -1 do
    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do
      revise $((j,i))$
  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},
    není AC, ale máme řešení bez navracení vzhledem k (x_1, x_2, x_3, x_4)

- Opakování revizí není nutné, doména revidované proměnné se v dalších cyklech nemění
- Složitost

Směrová hranová konzistence (pro binární CSP)

- CSP je **směrově hranově konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když je každá hrana (x_j, x_i) hranově konzistentní pro každé $j \leq i$.



- procedure
  DAC(G,$(x_1,\ldots,x_n)$) *Directed arc consistency* ***DAC***
  for $i = n$ to 1 by -1 do
    for $\forall\, j < i$ takové, že existuje hrana (x_j, x_i) do
      revise $((j,i))$
  end DAC

- Příklad: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_3 = x_4$
  - D1={red,white,black}, D2={green,white,black}, D3={red,white,blue}, D4={white,blue,black}
  - Po DAC: D4={white,blue,black}, D3={white,blue}, D2={green,white,black}, D1= {white},
    není AC, ale máme řešení bez navracení vzhledem k (x_1, x_2, x_3, x_4)

- Opakování revizí není nutné, doména revidované proměnné se v dalších cyklech nemění
- Složitost $O(ek^2)$ každá hrana se reviduje jednou se složitostí $O(k^2)$

Směrová i-konzistence

- Algoritmus pro DAC byl pouze pro binární CSP
- i-konzistence vyžaduje uvažování omezení s větším rozsahem proměnných
  - musíme aktualizovat relace až nad $(i-1)$ proměnnými

⇒ uvažujeme obecné CSP (tedy i **nebinární podmínky**)

Směrová i-konzistence

- Algoritmus pro DAC byl pouze pro binární CSP
- i-konzistence vyžaduje uvažování omezení s větším rozsahem proměnných
  - musíme aktualizovat relace až nad $(i-1)$ proměnnými

$\Rightarrow$ uvažujeme obecné CSP (tedy i **nebinární podmínky**)

- CSP je **směrově i-konzistentní** vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$ právě tehdy, když každých $(i-1)$ proměnných je i-konzistentní vzhledem ke všem proměnným, které je následují v uspořádání.
- CSP je **silně směrově i-konzistentní (DIC-i)** právě tehdy, když je směrově j-konzistentní pro každé $j \leq i$

Vlastnosti DIC-i

- Opakování
  - AC = silná 2-konzistence
  - PC = silná 3-konzistence
- DIC-2 je ekvivalentní DAC
  - u obou uvažujeme unární a binární omezení
  - DAC je definován pouze na binární CSP
  - DIC-2 je sice definován pro obecné CSP, ale je pouze schopen k dané hodnotě proměnné hledat konzistentní hodnotu v doméně další proměnné, nezachytí tedy omezení s více než dvěmi proměnnými
- DIC-3 lze podobně srovnat

  se směrovou konzistencí po cestě (directed path consistency, DPC)
- Algoritmus pro silnou směrovou konzistenci

  viz [Dechter, Constraint Processing]

Řešení bez navracení pomocí DIC-i

- Opakování:

  CSP vyřešíme bez navracení vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, jestliže pro každé $i \leq n$ může být každé častečné řešení $(x_1, \ldots, x_i)$ konzistentně rozšířeno o proměnnou x_{i+1}.

Řešení bez navracení pomocí DIC-i

- Opakování:

  CSP vyřešíme bez navracení vzhledem k uspořádání proměnných $(x_1, \ldots, x_n)$, jestliže pro každé $i \leq n$ může být každé částečné řešení $(x_1, \ldots, x_i)$ konzistentně rozšířeno o proměnnou x_{i+1}.

- Proměnná musí být kompatibilní s již ohodnocenými proměnnými, tj. s tolika proměnnými, kolik má „zpětných" hran

- Pro i zpětných hran potřebujeme směrovou $(i+1)$-konzistenci

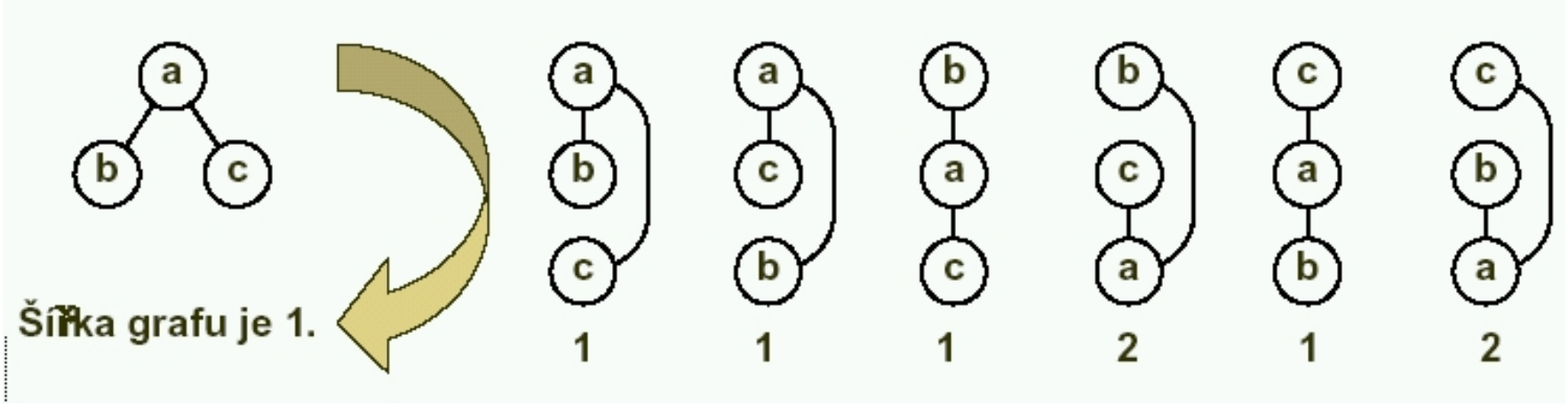
- Je-li m maximum počtu zpětných hran pro všechny vrcholy, stačí nám silná směrovou $(m+1)$-konzistence

- Při různém uspořádání vrcholů je počet zpětných hran různý

⇒ hledáme **uspořádání vrcholů s nejmenším počtem zpětných hran m**

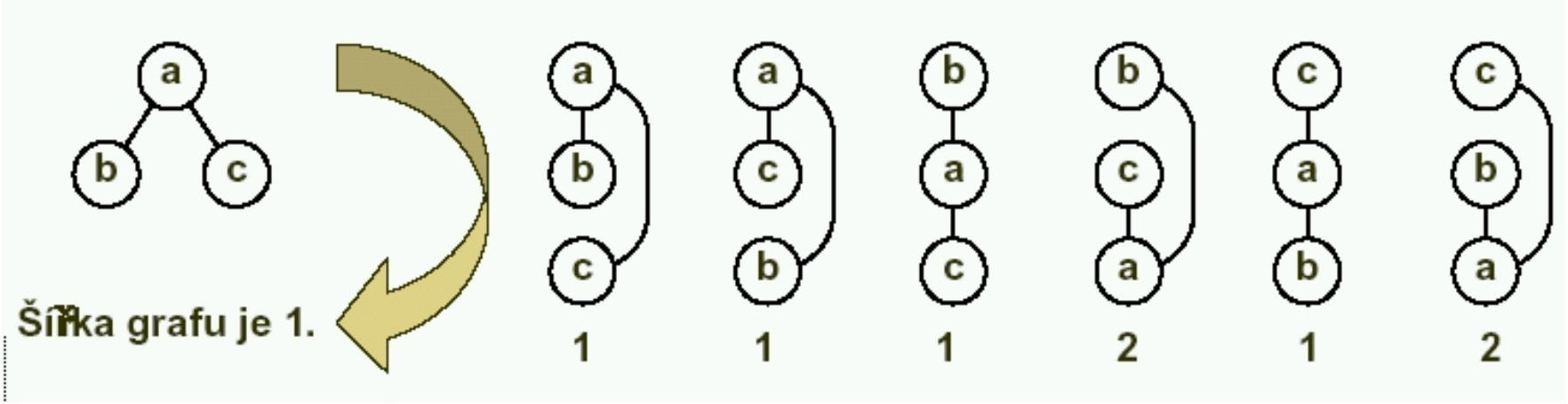
Šířka grafu

- **Uspořádaný graf** je graf s lineárním uspořádáním vrcholů.
- **Šířka vrcholu** v uspořádaném grafu je počet hran vedoucích z tohoto vrcholu do předchozích vrcholů.
- **Šířka uspořádaného grafu** je maximum z šířek jeho vrcholů.
- **Šířka grafu** je minimum z šířek všech jeho uspořádaných grafů.



Šířka grafu

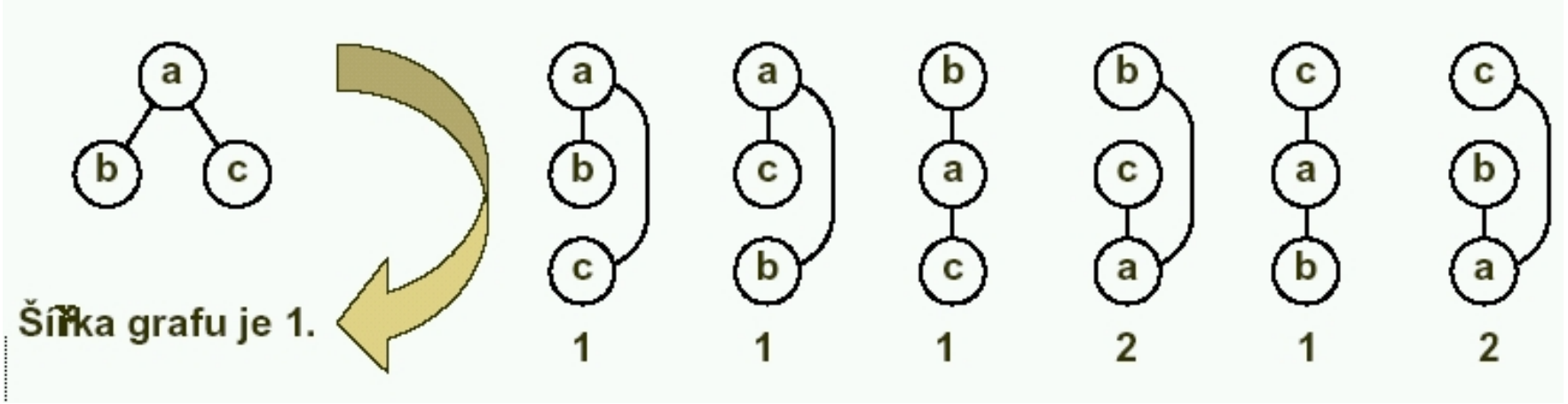
- **Uspořádaný graf** je graf s lineárním uspořádáním vrcholů.
- **Šířka vrcholu** v uspořádaném grafu je počet hran vedoucích z tohoto vrcholu do předchozích vrcholů.
- **Šířka uspořádaného grafu** je maximum z šířek jeho vrcholů.
- **Šířka grafu** je minimum z šířek všech jeho uspořádaných grafů.



- `procedure MinWidthOrdering((V,E))`

Šířka grafu

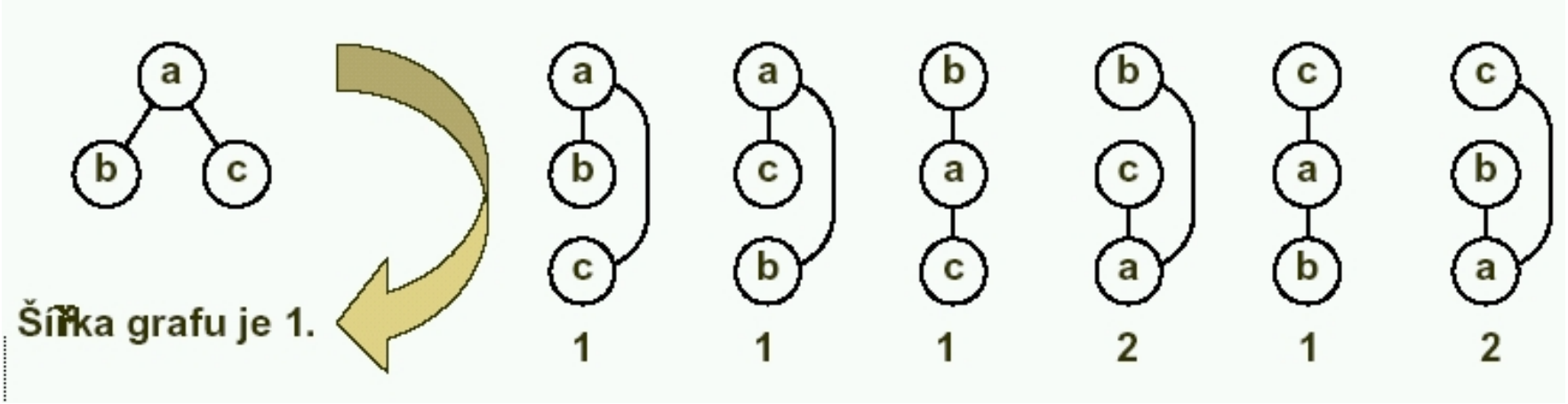
- **Uspořádaný graf** je graf s lineárním uspořádáním vrcholů.
- **Šířka vrcholu** v uspořádaném grafu je počet hran vedoucích z tohoto vrcholu do předchozích vrcholů.
- **Šířka uspořádaného grafu** je maximum z šířek jeho vrcholů.
- **Šířka grafu** je minimum z šířek všech jeho uspořádaných grafů.



- `procedure MinWidthOrdering((V,E))` (konstruujeme od konce)

Šířka grafu

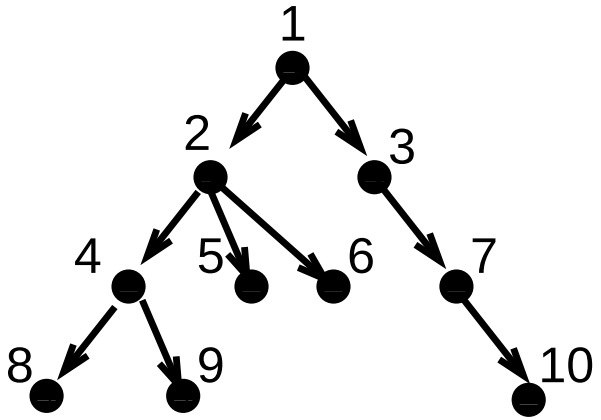
- **Uspořádaný graf** je graf s lineárním uspořádáním vrcholů.
- **Šířka vrcholu** v uspořádaném grafu je počet hran vedoucích z tohoto vrcholu do předchozích vrcholů.
- **Šířka uspořádaného grafu** je maximum z šířek jeho vrcholů.
- **Šířka grafu** je minimum z šířek všech jeho uspořádaných grafů.



- `procedure MinWidthOrdering((V,E))` (konstruujeme od konce)
  `Q := {}` (do vybraného uzlu povede nejméně zpětných hran)
  `while V not empty do N := vyber a smaž uzel s nejmenším počtem hran z (V,E)`
  `zařad' N do Q`
  `return Q`

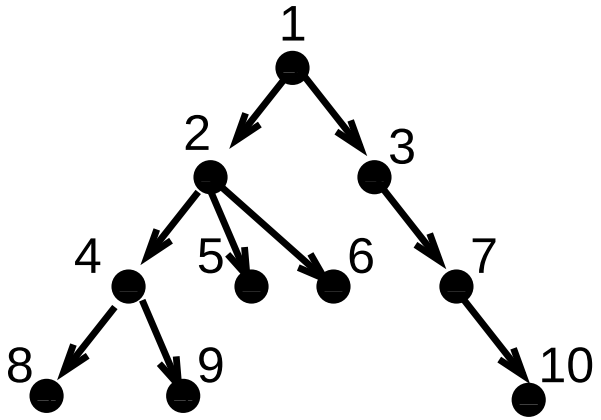
Graf podmínek s šířkou 1 = strom

- *Tvrzení:* Graf je strom právě tehdy, když má šířku 1.



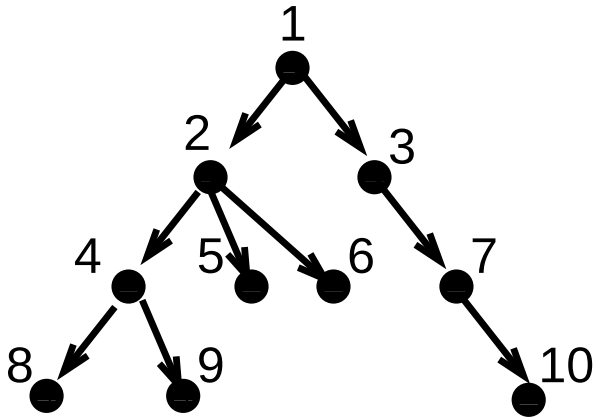
Graf podmínek s šířkou 1 = strom

- *Tvrzení:* Graf je strom právě tehdy, když má šířku 1.
- *Důkaz:*
  - Předpoklad: Strom neobsahuje cyklus.



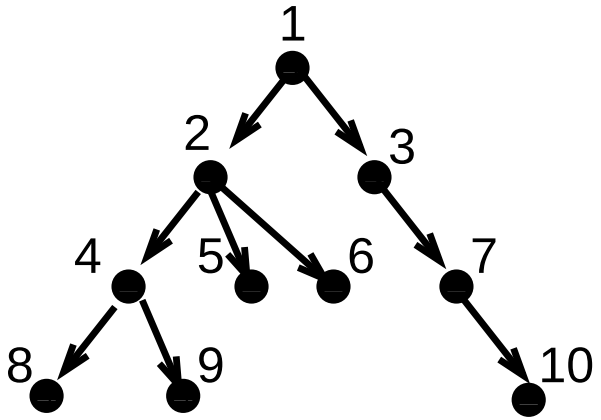
Graf podmínek s šířkou 1 = strom

- *Tvrzení:* Graf je strom právě tehdy, když má šířku 1.
- *Důkaz:*
  - Předpoklad: Strom neobsahuje cyklus.
  - ⇐ Mějme graf šířky 1. Pokud by obsahoval cyklus, tak bychom pro libovolné uspořádání proměnných měli proměnnou se dvěma rodiči, tj. spor.



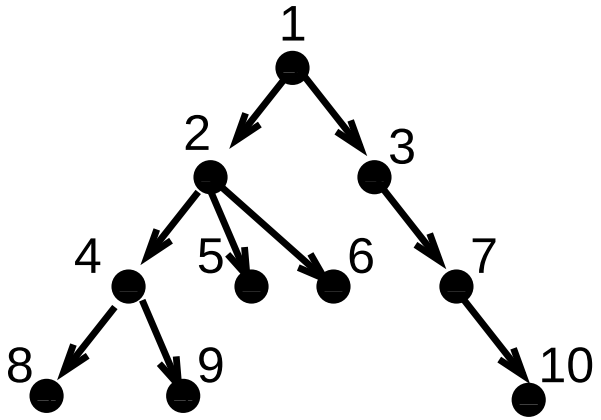
Graf podmínek s šířkou 1 = strom

- *Tvrzení:* Graf je strom právě tehdy, když má šířku 1.
- *Důkaz:*
  - Předpoklad: Strom neobsahuje cyklus.
  - ⇐ Mějme graf šířky 1. Pokud by obsahoval cyklus, tak bychom pro libovolné uspořádání proměnných měli proměnnou se dvěma rodiči, tj. spor.
  - ⇒ Mějme graf bez cyklů. Pak lze vytvořit orientovaný strom s kořenem tak, že všechny hrany směřují z kořenového uzlu.



Graf podmínek s šířkou 1 = strom

- *Tvrzení:* Graf je strom právě tehdy, když má šířku 1.
- *Důkaz:*
  - Předpoklad: Strom neobsahuje cyklus.
  - ⇐ Mějme graf šířky 1. Pokud by obsahoval cyklus, tak bychom pro libovolné uspořádání proměnných měli proměnnou se dvěma rodiči, tj. spor.
  - ⇒ Mějme graf bez cyklů. Pak lze vytvořit orientovaný strom s kořenem tak, že všechny hrany směřují z kořenového uzlu. V tomto stromu má každý uzel nejvýše jednoho rodiče. Libovolné uspořádání, ve kterém rodič předchází potomky ve stromě, má šířku 1.

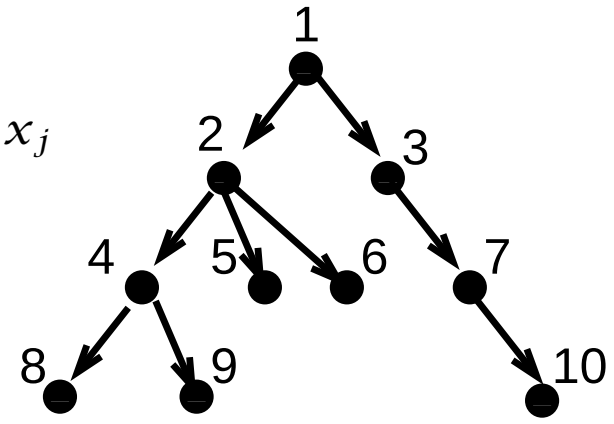


Konzistence pro stromové CSP

- *Tvrzení:* Nechť $d = (x_1, \ldots, x_n)$ je uspořádání stromového grafu podmínek T pro daný CSP. Jestliže T je směrově hranově konzistentní vzhledem k d, pak má CSP řešení bez navracení vzhledem k d.

Konzistence pro stromové CSP

- *Tvrzení:* Nechť $d = (x_1, \ldots, x_n)$ je uspořádání stromového grafu podmínek T pro daný CSP. Jestliže T je směrově hranově konzistentní vzhledem k d, pak má CSP řešení bez navracení vzhledem k d.
- *Důkaz:*
  - Uvažujme uspořádání proměnných $d = (x_1, \ldots, x_n)$ s šířkou 1.
  - Předpokládejme, že $x_1, \ldots, x_i$ jsou konzistentně nainstanciovány.
  - Snažíme se nainstanciovat x_{i+1}:
    - d je uspořádaní šířky 1, tedy existuje pouze jeden rodič x_j ($j \leq i$) proměnné x_{i+1}, který může omezovat x_{i+1} :wq
    - (x_j, x_{i+1}) je hranově konzistentní (z DAC), tedy existuje hodnota konzistentní se současným přiřazením x_j
    - tuto hodnotu přiřadíme x_{i+1}



Algoritmus zajištění DAC pro stromové CSP

procedure TreeSolving(T)

nalezení uspořádání $(x_1,...,x_n)$ s šířkou 1 pomocí stromu T

(rodič předchází potomky)

necht' $x_{p(i)}$ označuje rodiče x_i v uspořádaném stromu

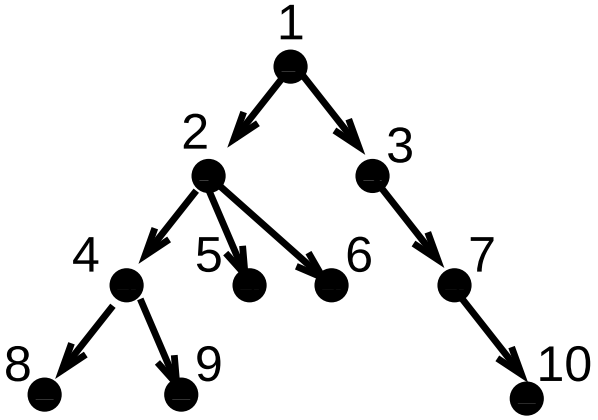
for $i = n$ to 1 by -1 do

    revise($(x_{p(i)}, x_i)$)

    if $D_{p(i)} = \emptyset$ exit (řešení neexistuje)

end TreeSolving

Cvičení: X1,X2,X3,X4 in 1..5, X1=X2+1, X1<X3, X3<X4



Algoritmus zajištění DAC pro stromové CSP

- procedure TreeSolving(T)

  nalezení uspořádání $(x_1,...,x_n)$ s šířkou 1 pomocí stromu T

  (rodič předchází potomky)

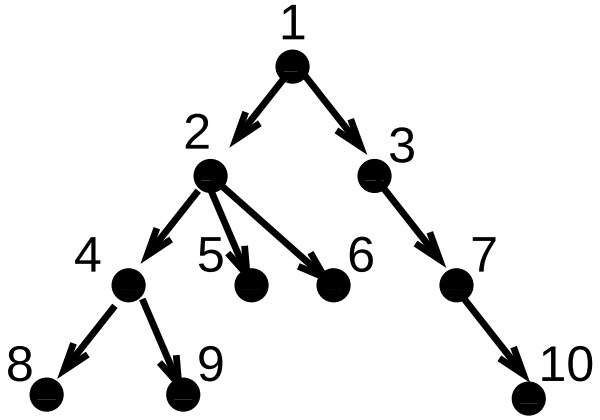
  necht' $x_{p(i)}$ označuje rodiče x_i v uspořádaném stromu

  for $i = n$ to 1 by -1 do

  revise($(x_{p(i)}, x_i)$)

  if $D_{p(i)} = \emptyset$ exit (řešení neexistuje)

  end TreeSolving



Cvičení: X1,X2,X3,X4 in 1..5, X1=X2+1, X1<X3, X3<X4

⇒ Složitost algoritmu $O(nk^2)$

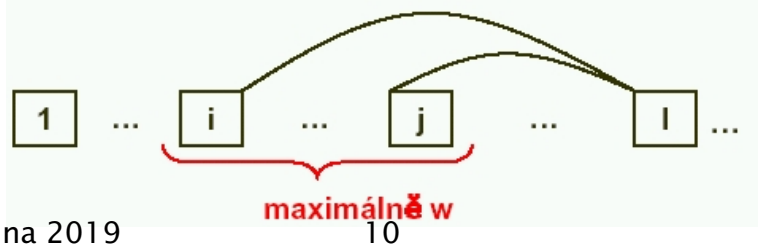
- Algoritmus zajistí DAC pro stromové CSP,
  tj. bude možné nalézt řešení bez navracení
- Pokud aplikujeme DAC vzhledem k uspořádání šířky 1, a pak v opačném směru, tak dosáhneme plné hranové konzistence. viz Barták, přednáška

Šířka grafu a stupeň konzistence

- *Tvrzení:* Nechť je dán CSP, jehož uspořádaný graf podmínek s uspořádáním d má šířku $i - 1$. Jestliže je problém silně směrově i-konzistentní, pak je problém řešitelný bez navracení vzhledem k d.

Šířka grafu a stupeň konzistence

- *Tvrzení:* Nechť je dán CSP, jehož uspořádaný graf podmínek s uspořádáním d má šířku $i-1$. Jestliže je problém silně směrově i-konzistentní, pak je problém řešitelný bez navracení vzhledem k d.
- *Důkaz:*
  - existuje uspořádaný graf s uspořádáním d a šířkou $i-1$
  - speciálně, počet zpětných hran pro každou proměnnou je maximálně $i-1$
  - proměnné ohodnocujeme v pořadí uspořádání grafu
  - nyní, pokud ohodnocujeme proměnnou:
    - musíme najít hodnotu kompatibilní se všemi již ohodnocenými proměnnými, které jsou s proměnnou spojené podmínkou (hranou)
    - nechť takových proměnných je m, potom $m \leq (i-1)$ (⇐ graf má šířku $(i-1)$)
    - graf je směrově i-konzistentní, tedy taková hodnota musí existovat (⇐ z definice)



Adaptivní konzistence

- *Původní intuice:* proměnná musí být kompatibilní s již ohodnocenými proměnnými, tj. s tolika proměnnými, kolik má „zpětných" hran.
  - Je tedy nutná směrová i-konzistence odpovídající šířce grafu?
- *Problém:* algoritmy silné směrové i-konzistence pro $i \geq 3$ mění graf podmínek přidáváním hran, nutná úroveň i se může zvětšovat

Adaptivní konzistence

- *Původní intuice:* proměnná musí být kompatibilní s již ohodnocenými proměnnými, tj. s tolika proměnnými, kolik má „zpětných" hran.
  - Je tedy nutná směrová i-konzistence odpovídající šířce grafu?
- *Problém:* algoritmy silné směrové i-konzistence pro $i \geq 3$ mění graf podmínek přidáváním hran, nutná úroveň i se může zvětšovat
- Algoritmus **adaptivní konzistence ADC** pro nalezení řešení bez navracení
  - uvažujme uspořádání proměnných d
  - rekurzivně vytváříme směrovou i-konzistenci (od poslední k první proměnné v d)
  - měníme úroveň i od uzlu k uzlu tak, abychom se **adaptovali aktuální šířce uzlu** v momentě zpracování

Adaptivní konzistence

- *Původní intuice:* proměnná musí být kompatibilní s již ohodnocenými proměnnými, tj. s tolika proměnnými, kolik má „zpětných" hran.
  - Je tedy nutná směrová i-konzistence odpovídající šířce grafu?
- *Problém:* algoritmy silné směrové i-konzistence pro $i \geq 3$ mění graf podmínek přidáváním hran, nutná úroveň i se může zvětšovat
- Algoritmus **adaptivní konzistence ADC** pro nalezení řešení bez navracení
  - uvažujme uspořádání proměnných d
  - rekurzivně vytváříme směrovou i-konzistenci (od poslední k první proměnné v d)
  - měníme úroveň i od uzlu k uzlu tak, abychom se **adaptovali aktuální šířce uzlu** v momentě zpracování
- Proč algoritmus funguje?
  - v momentě zpracování uzlu je určena finální šířka uzlu
  - víme tedy, jakou úroveň směrové i-konzistence musíme dosáhnout

Polynomiální CSP

- w šířka grafu, n počet proměnných, k horní mez velikosti domén
- Složitost DIC-i $O(nw^i \cdot (2k)^i)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing
- Časová a prostorová složitost algoritmu adaptivní konzistence je $O(n \cdot (2k)^{w+1})$ a $O(n \cdot k^w)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing

Polynomiální CSP

- w šířka grafu, n počet proměnných, k horní mez velikosti domén
- Složitost DIC-i $O(nw^i \cdot (2k)^i)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing
- Časová a prostorová složitost algoritmu adaptivní konzistence je $O(n \cdot (2k)^{w+1})$ a $O(n \cdot k^w)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing
- *Věta:* Třída CSP problémů, jejichž šířka grafu je ohraničena konstantou b je řešitelná v polynomiálním čase a prostoru.

Polynomiální CSP

- w šířka grafu, n počet proměnných, k horní mez velikosti domén
- Složitost DIC-i $O(nw^i \cdot (2k)^i)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing
- Časová a prostorová složitost algoritmu adaptivní konzistence je $O(n \cdot (2k)^{w+1})$ a $O(n \cdot k^w)$ důkaz viz Dechter, Constraint Processing
- *Věta:* Třída CSP problémů, jejichž šířka grafu je ohraničena konstantou b je řešitelná v polynomiálním čase a prostoru.
- Použitelnost algoritmu ADC
  - ADC není jen procedura pro rozhodnutí konzistence
  - ADC může sloužit i ke kompilaci
    - ADC transformuje problém na ekvivalentní graf, ze kterého může být každé řešení odvozeno v lineárním čase
    - prostorová složitost ale zůstává

Obecná hranová konzistence, konzistence mezí

Pojmy a značení

- **Rozsah omezení** $scope(c)$

  množina proměnných, na kterých je c definováno

  - příklad: $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$

    $scope(A < B) = \{A, B\}$

Pojmy a značení

- **Rozsah omezení** $scope(c)$

  množina proměnných, na kterých je c definováno

  - příklad: $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$

    $scope(A < B) = \{A, B\}$

- **k-tice** $\vec{t}$ hodnot patřících do c: $\vec{t} \in c$

  - příklad (pokračování): $(0, 1) \in (A < B)$

Pojmy a značení

- **Rozsah omezení** $scope(c)$

  množina proměnných, na kterých je c definováno

  - příklad: $A, B, C \in \{0, 1, 2\}$

    $scope(A < B) = \{A, B\}$

- **k-tice** $\vec{t}$ hodnot patřících do c: $\vec{t} \in c$

  - příklad (pokračování): $(0, 1) \in (A < B)$

- Proměnná $x \in scope(c)$, k-tice $\vec{t} \in c$

  $\vec{t}[x]$ je hodnota proměnné x v $\vec{t}$

  - příklad (pokračování): $(0, 1)[A] = 0$

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - `A + B = C`, `A` $\in \{1,2,3\}$, `B` $\in \{2,3,4\}$, `C` $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - A + B = C, A $\in \{1,2,3\}$, B $\in \{2,3,4\}$, C $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní
- **Omezení c je obecně hranově konzistentní**, jestliže má každá hodnota a každé proměnné $x \in scope(c)$ doménovou podporu v c
- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **doménovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
- Příklad: A $\in \{0,1\}$, B$\in \{0,1\}$, C $\in \{1,2\}$, A = B+C,

  0 u A

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - A + B = C, A $\in \{1,2,3\}$, B $\in \{2,3,4\}$, C $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní
- **Omezení c je obecně hranově konzistentní**, jestliže má každá hodnota a každé proměnné $x \in scope(c)$ doménovou podporu v c
- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **doménovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
- Příklad: A $\in \{0,1\}$, B$\in \{0,1\}$, C $\in \{1,2\}$, A = B+C,

  0 u A nemá podporu, 1 u A

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - A + B = C, A $\in \{1,2,3\}$, B $\in \{2,3,4\}$, C $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní
- **Omezení c je obecně hranově konzistentní**, jestliže má každá hodnota a každé proměnné $x \in scope(c)$ doménovou podporu v c
- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **doménovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
- Příklad: A $\in \{0,1\}$, B$\in \{0,1\}$, C $\in \{1,2\}$, A = B+C,

  0 u A nemá podporu, 1 u A má podporu (1,0,1)

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - A + B = C, A $\in \{1,2,3\}$, B $\in \{2,3,4\}$, C $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní
- **Omezení c je obecně hranově konzistentní**, jestliže má každá hodnota a každé proměnné $x \in scope(c)$ doménovou podporu v c
- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **doménovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
- Příklad: A $\in \{0,1\}$, B$\in \{0,1\}$, C $\in \{1,2\}$, A = B+C,

  0 u A nemá podporu, 1 u A má podporu (1,0,1)
- **CSP je obecně hranově konzistentní** $\Longleftrightarrow$

  všechna jeho omezení jsou obecně hranově konzistentní
- Příklad (pokračování): po GAC dostaneme

Definice obecné hranové konzistence (GAC)

- ***Generalized arc consistency*** (někdy nazývána **doménová konzistence**)
  - pro každou proměnnou z podmínky a každou její hodnotu existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - A + B = C, A $\in \{1,2,3\}$, B $\in \{2,3,4\}$, C $\in \{3,\ldots,7\}$ je obecně hranově konzistentní
- **Omezení c je obecně hranově konzistentní**, jestliže má každá hodnota a každé proměnné $x \in scope(c)$ doménovou podporu v c
- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **doménovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
- Příklad: A $\in \{0,1\}$, B$\in \{0,1\}$, C $\in \{1,2\}$, A = B+C,

  0 u A nemá podporu, 1 u A má podporu (1,0,1)
- **CSP je obecně hranově konzistentní** $\Longleftrightarrow$

  všechna jeho omezení jsou obecně hranově konzistentní
- Příklad (pokračování): po GAC dostaneme A=1, B=0, C=1

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty** v doméně proměnné
  - tedy došlo ke **změně mezí domény proměnné**

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty** v doméně proměnné
  - tedy došlo ke **změně mezí domény proměnné**
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - A > B

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency*** **BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty** v doméně proměnné
  - tedy došlo ke **změně mezí domény proměnné**
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - `A > B` => `min(A)` $\geq$ `min(B)+1`, `max(B)` $\leq$ `max(A)-1`
  - příklad: `A` $\in \{4,\ldots,10\}$, `B` $\in \{6,\ldots 18\}$, `A > B`

    `min(A)` $\geq$

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty** v doméně proměnné
  - tedy došlo ke **změně mezí domény proměnné**
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - A > B => min(A) $\geq$ min(B)+1, max(B) $\leq$ max(A)-1
  - příklad: A $\in \{4,\ldots,10\}$, B$\in \{6,\ldots 18\}$, A > B

    min(A) $\geq$ 6+1 $\Rightarrow$ A $\in \{7,\ldots,10\}$

    max(B) $\leq$ 10-1 $\Rightarrow$ B $\in \{6,\ldots,9\}$

Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty** v doméně proměnné
  - tedy došlo ke **změně mezí domény proměnné**
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - A > B => min(A) $\geq$ min(B)+1, max(B) $\leq$ max(A)-1
  - příklad: A $\in \{4,\ldots,10\}$, B$\in \{6,\ldots 18\}$, A > B

    min(A) $\geq$ 6+1 $\Rightarrow$ A $\in \{7,\ldots,10\}$

    max(B) $\leq$ 10-1 $\Rightarrow$ B $\in \{6,\ldots,9\}$
- **Cvičení:** napište pravidla pro konzistenci mezí pro uvedená omezení
  - A < B, A $\geq$ B, A $\leq$ B
  - a aplikujte je v případě domén A $\in \{1,\ldots,10\}$, B $\in \{0,\ldots,5\}$
- Jak je to tedy pro nebinární omezení?

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A = B + C => $\min(A) \geq \min(B)+\min(C)$, $\max(A) \leq \max(B)+\max(C)$

  $\min(B) \geq \min(A)-\max(C)$, $\max(B) \leq \max(A)-\min(C)$

  $\min(C) \geq \min(A)-\max(B)$, $\max(C) \leq \max(A)-\min(B)$

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- `A = B + C` => $\texttt{min(A)} \geq \texttt{min(B)+min(C)}$, $\texttt{max(A)} \leq \texttt{max(B)+max(C)}$

  $\texttt{min(B)} \geq \texttt{min(A)-max(C)}$, $\texttt{max(B)} \leq \texttt{max(A)-min(C)}$

  $\texttt{min(C)} \geq \texttt{min(A)-max(B)}$, $\texttt{max(C)} \leq \texttt{max(A)-min(B)}$

  - změna `min(A)` vyvolá pouze změnu `min(B)` a `min(C)`
  - změna `max(A)` vyvolá pouze změnu `max(B)` a `max(C)`, ...

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A = B + C => min(A) $\geq$ min(B)+min(C), max(A) $\leq$ max(B)+max(C)
  min(B) $\geq$ min(A)-max(C), max(B) $\leq$ max(A)-min(C)
  min(C) $\geq$ min(A)-max(B), max(C) $\leq$ max(A)-min(B)
  - změna min(A) vyvolá pouze změnu min(B) a min(C)
  - změna max(A) vyvolá pouze změnu max(B) a max(C), ...

- Příklad: A $\in \{1,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,10\}$, A = B + 2

  A = B + 2 $\Rightarrow$

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A = B + C => min(A) $\geq$ min(B)+min(C), max(A) $\leq$ max(B)+max(C)
  min(B) $\geq$ min(A)-max(C), max(B) $\leq$ max(A)-min(C)
  min(C) $\geq$ min(A)-max(B), max(C) $\leq$ max(A)-min(B)
  - změna min(A) vyvolá pouze změnu min(B) a min(C)
  - změna max(A) vyvolá pouze změnu max(B) a max(C), ...

- Příklad: A $\in \{1,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,10\}$, A = B + 2

  A = B + 2 $\Rightarrow$ min(A)$\geq$1+2, max(A)$\leq$10+2 $\Rightarrow$ A $\in \{3,\ldots,6,9,10\}$
  $\Rightarrow$ min(B)$\geq$1-2, max(B)$\leq$10-2 $\Rightarrow$ B $\in \{1,\ldots,8\}$

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A = B + C => min(A) $\geq$ min(B)+min(C), max(A) $\leq$ max(B)+max(C)
  min(B) $\geq$ min(A)-max(C), max(B) $\leq$ max(A)-min(C)
  min(C) $\geq$ min(A)-max(B), max(C) $\leq$ max(A)-min(B)
  - změna min(A) vyvolá pouze změnu min(B) a min(C)
  - změna max(A) vyvolá pouze změnu max(B) a max(C), ...

- Příklad: A $\in \{1,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,10\}$, A = B + 2

  A = B + 2 $\Rightarrow$ min(A)$\geq$1+2, max(A)$\leq$10+2 $\Rightarrow$ A $\in \{3,\ldots,6,9,10\}$
  $\Rightarrow$ min(B)$\geq$1-2, max(B)$\leq$10-2 $\Rightarrow$ B $\in \{1,\ldots,8\}$

  tj. doména B má pouze změněny meze a hodnoty 5, 6 zůstanou v doméně

  A $\in \{3,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,8\}$, A = B + 2 je BC, není GAC, není AC

Konzistence mezí a aritmetická omezení

- A = B + C => min(A) $\geq$ min(B)+min(C), max(A) $\leq$ max(B)+max(C)
  min(B) $\geq$ min(A)-max(C), max(B) $\leq$ max(A)-min(C)
  min(C) $\geq$ min(A)-max(B), max(C) $\leq$ max(A)-min(B)
  - změna min(A) vyvolá pouze změnu min(B) a min(C)
  - změna max(A) vyvolá pouze změnu max(B) a max(C), ...

- Příklad: A $\in \{1,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,10\}$, A = B + 2

  A = B + 2 $\Rightarrow$ min(A)$\geq$1+2, max(A)$\leq$10+2 $\Rightarrow$ A $\in \{3,\ldots,6,9,10\}$
  $\Rightarrow$ min(B)$\geq$1-2, max(B)$\leq$10-2 $\Rightarrow$ B $\in \{1,\ldots,8\}$

  tj. doména B má pouze změněny meze a hodnoty 5, 6 zůstanou v doméně

  A $\in \{3,\ldots,6,9,10\}$, B $\in \{1,\ldots,8\}$, A = B + 2 je BC, není GAC, není AC

- **Cvičení:** napište pravidla pro konzistenci mezí pro uvedená omezení
  - A = B - 3, **A = B - C, A = B + C, A < B + C**,
  - a aplikujte je v případě domén A $\in \{1,\ldots,10\}$, B $\in \{0,\ldots,5\}$, C $\in \{2,3,4\}$

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in [min(D_y), max(D_y)]$
    - př. (pokrač.) $y = 5, z = 7, \quad D_y = D_z = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in [min(D_y), max(D_y)]$
    - př. (pokrač.) $y = 5, z = 7, \quad D_y = D_z = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

      $5 = \vec{t}[y]$ i $7 = \vec{t}[z]$ mají intervalovou podporu

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in [min(D_y), max(D_y)]$
    - př. (pokrač.) $y = 5, z = 7, \quad D_y = D_z = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

      $5 = \vec{t}[y]$ i $7 = \vec{t}[z]$ mají intervalovou podporu
- Srovnání: doménová podpora GAC
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in [min(D_y), max(D_y)]$
    - př. (pokrač.) $y = 5, z = 7, \quad D_y = D_z = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

      $5 = \vec{t}[y]$ i $7 = \vec{t}[z]$ mají intervalovou podporu
- Srovnání: doménová podpora GAC
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
    - př. (pokrač.) $7 = \vec{t}[z]$ nemá doménovou podporu

Definice konzistence mezí

- Hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má **intervalovou podporu** $\vec{t}$ v c, jestliže
  - $\vec{t} \in c$ a platí $a = \vec{t}[x]$
    - příklad: $a = 1, \vec{t} = (1, 5, 7)$
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in [min(D_y), max(D_y)]$
    - př. (pokrač.) $y = 5, z = 7, \quad D_y = D_z = \{1, 2, 4, 5, 10\}$

      $5 = \vec{t}[y]$ i $7 = \vec{t}[z]$ mají intervalovou podporu
- Srovnání: doménová podpora GAC
  - pro každé $y \in scope(c)$ platí $\vec{t}[y] \in D_y$
    - př. (pokrač.) $7 = \vec{t}[z]$ nemá doménovou podporu
- **Omezení má konzistentní meze**, jestliže každá hodnota a proměnné $x \in scope(c)$ má intervalovou podporu v c
- **CSP má konzistentní meze** $\iff$ všechna jeho omezení mají konzistentní meze