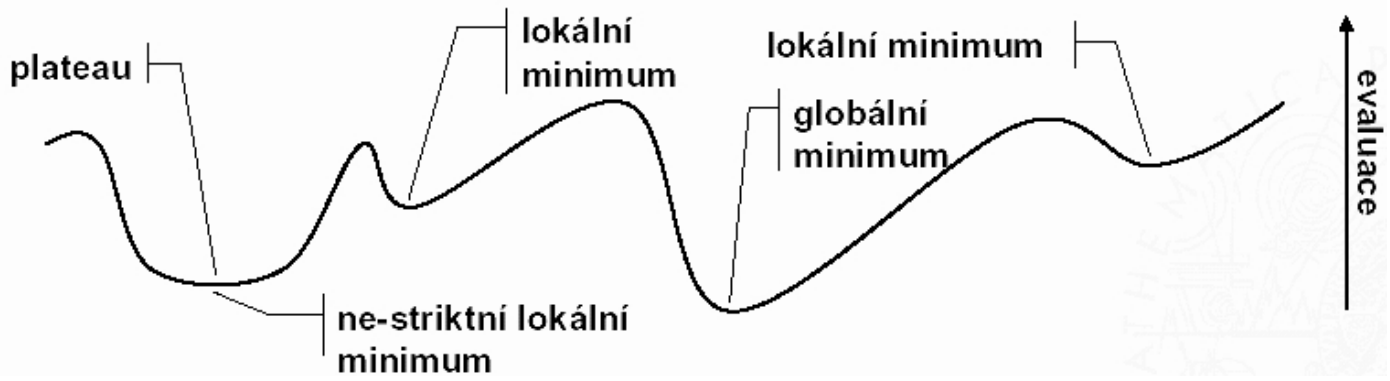
Lokální prohledávání

Lokální prohledávání (LS)

- Princip
  - pracuje s **úplnými nekonzistentními přiřazeními proměnných**
  - snaží se **lokálními opravami** snížit počet konfliktů
- Příklad: umístění n dam na šachovnici
  - iniciální přiřazení umístí každou královnu do každého sloupce a řádku bez ohledu na diagonální omezení
  - přesunujeme královnu v jejím sloupci do jiného řádku tak, abychom odstranili co nejvíce konfliktů
  - LS vyřeší řádově větší problémy než algoritmy založené na prohledávání do hloubky
- Přibližná metoda prohledávání
  - neúplná metoda
  - nezaručuje nalezení (vyloučení existence) řešení i když existuje (neexistuje)
  - malé paměťové nároky

Terminologie lokálního prohledávání

- **Stav θ:** ohodnocení všech proměnných
- **Evaluace E:** hodnota objektivní funkce (počet nesplněných podmínek=**počet konfliktů**)
- **Globální optimum:** stav s nejlepší evaluací
- **Lokální změna:** změna hodnoty (jedné) proměnné
- **Okolí o:** množina stavů lišící se od daného stavu o jednu lokální změnu
- **Lokální optimum:** stav, v jehož okolí jsou stavy s horší evaluací; není globálním optimum
- **Striktní lokální optimum:** stav, v jehož okolí jsou pouze stavy s horší evaluací; není globálním optimum
- **Ne-striktní lokální optimum:** stav, v jehož okolí exisují stavy se stejnou evaluací; není globálním optimum
- **Plateau:** množina stavů se stejnou evaluací



Algoritmus lokálního prohledávání

- Algoritmy lokálního prohledávání mají společnou kostru

```
procedure LS(MaxPokusu,MaxZmen)                    parametry algoritmu
θ := náhodné ohodnocení proměnných
for i := 1 to MaxPokusu while GPodminka do
    for j := 1 to MaxZmen while LPodminka do
        if E(θ)=0 then
            return θ
        vyber δ ∈ o(θ)
        if akceptovatelne(δ) then
            θ := δ
    θ := novyStav(θ)
return nejlepší θ
```

- Jak stanovit MaxPokusu,MaxZmen?
  - pokračovat dokud existuje přiřazení s lepší evaluací
  - restart (MaxPokusu>1) v některých případech diskutabilní

Metoda největšího stoupání (*hill climbing*) HC

- Začíná v náhodně vybraném stavu
- Hledá vždy nejlepší stav v okolí
- Okolí = hodnota libovolné proměnné je změněna, velikost okolí $n \times (d-1)$
- Útěk ze striktního lokálního minima pomocí restartu

```
procedure HC(MaxZmen)
restart: θ := náhodné ohodnocení proměnných
         for j := 1 to MaxZmen do
             if E(θ) = 0 then
                return θ
             if θ je striktní lokální optimum then
                goto restart
             else θ := stav z o(θ) s nejlepší evaluací
         goto restart
end HC
```

Metoda minimalizace konfliktů (MC)

- Okolí u HC je poměrně velké: $n \times (d-1)$
  - ale pouze změna konfliktní proměnné může přinést zlepšení
  - konfliktní proměnná = vystupuje v některých nesplněných podmínkách
- MC mění pouze konfliktní proměnné
  - okolí = hodnota zvolené proměnné je změněna, velikost okolí $d-1$

```
procedure MC(MaxZmen)
θ := náhodné ohodnocení proměnných
PocetZmen := 0
while E(θ) > 0 ∧ PocetZmen<MaxZmen do
      vyber náhodně konfliktní proměnnou V
      vyber hodnotu a, která minimalizuje počet konfliktů pro V
      if a≠současná hodnota V then
         přiřad' a do V
         PocetZmen := PocetZmen+1
return θ
```

neřešíme únik z lokálního optima

Náhodná procházka (*Random Walk*) RW

- Jak **uniknout z lokálního optima bez restartu**?
  - přidáním „šumu” do algoritmu
- Pokud se dostaneme do lokálního optima
  - náhodně zvolíme stav z okolí a pokračujeme jím
  - tato metoda samostatně k řešení nepovede
  - potřebuje další směrování v prohledávacím prostoru
    - lze kombinovat s HC i MC
- **RW je kombinováno s heuristikou pomocí pravděpodobnostního rozložení**
  - pravděpodobnost náhodného kroku je p
  - pravděpodobnost použití směrové heuristiky je $1 - p$
  - náhodná procházka tedy nahrazuje restart
    - únik z lokálního minima prostřednictvím náhodného výběru

Minimalizace konfliktů s náhodnou procházkou

```
procedure MCRW(MaxZmen,p)                                    Rozdíly od MC
θ := náhodné ohodnocení proměnných
PocetZmen := 0
while E(θ) > 0 ∧ PocetZmen<MaxZmen do
      vyber náhodně konfliktní proměnnou V
      generuj náhodné číslo Pravdepodobnost ∈ [0,1]
      if Pravdepodobnost ≥ (1 − p)                           0.02 ≤ p ≤ 0.1
         vyber náhodně hodnotu a pro V
      else vyber hodnotu a, která minimalizuje počet konfliktů pro V
      if a≠současná hodnota V then
         přiřad' a do V
         PocetZmen := PocetZmen+1
return θ
```

Největší stoupání s náhodnou procházkou

```
procedure HCRW(MaxZmen,p)
θ := náhodné ohodnocení proměnných
PocetZmen := 0
while E(θ) > 0 ∧ PocetZmen<MaxZmen do
      generuj náhodné číslo Pravdepodobnost ∈ [0,1]
      if Pravdepodobnost ≥ (1 − p)
         vyber náhodně konfliktní proměnnou V
         vyber náhodně hodnotu a pro V
      else vyber ⟨V,a⟩ s nejlepší evaluací
      if a≠současná hodnota V then
         přiřad' a do V
         PocetZmen := PocetZmen+1
return θ
```

Rozdíly od MCRW

Tabu seznam

- Setrvání v lokálním optimu je speciálním případem cyklu
- Jak se obecně zbavit cyklů?
  - stačí si pamatovat předchozí stavy a zakázat opakování stavu
    - paměťově příliš náročné (mnoho stavů)
  - můžeme si zapamatovat pouze několik posledních stavů (zabrání krátkým cyklům)
- **Tabu seznam** = seznam **tabu (zakázaných) stavů**
  - stav lze popsat význačným atributem (není nutné uchovávat celý stav)
    - (proměnná,hodnota): zachycuje změnu stavu (uložíme původní hodnoty)
  - tabu seznam má **fixní délku (*tabu tenure*)**
    - „staré" stavy ze seznamu vypadávají s přicházejímími novými stavy
- **Aspirační kritérium** = odtabuizování stavu
  - do stavu lze přejít, i když je v tabu seznamu (např. krok vede k celkově lepšímu stavu)
- Tabu seznam je používán samostatně i v kombinaci s jinými metodami LS

Algoritmus prohledávání s tabu seznamem

- Tabu seznam zabraňuje krátkému cyklení
- Povoleny jsou pouze tahy mimo tabu seznam a tahy splňující aspirační kritérium
- **Tabu seznam (TS) v kombinaci s metodou stoupání (HC)**:

```
procedure TSHC(MaxZmen)
θ := náhodné ohodnocení proměnných
PocetZmen := 0
while E(θ) > 0 ∧ PocetZmen<MaxZmen do
      vyber ⟨V,a⟩ s nejlepší evaluací tak, že
            není v tabu seznamu a nebo splňuje aspirační kriterium
      přidej ⟨V,c⟩ do tabu seznamu, kde c je současná hodnota V
      smaž nejstarší položku v tabu seznamu
      přiřad' a do V
      PocetZmen := PocetZmen+1
return θ
```

Výběr souseda: přehled

- **Metoda stoupání (HC)**
  - soused s nejlepší evaluací vybrán
- **Tabu prohledávání (TS+HC)**
  - soused s nejlepší evaluací vybrán (metoda stoupání)
  - sousedé z tabu seznamu nemohou být vybráni
- **Minimální konflikt (MC)**
  - soused je omezen na náhodně vybranou konfliktní proměnnou
  - výběr její hodnoty s nejlepší evaluací
- **Náhodná procházka (RW)**
  - soused vybrán náhodně
- **Min. konflikt (metoda stoupání) s náhodnou procházkou MC+RW (HC+RW)**
  - s malou pravděpodobností: náhodný výběr souseda
  - jinak: minimální konflikt (metoda stoupání)

Simulované žíhání (*simulated annealing*) SA

- Myšlenka: **simulace procesu ochlazování kovů**
  - na začátku při vyšší teplotě atomy více kmitají a
    pravděpodobnost změny krystalické mřížky je vyšší
  - postupným ochlazováním se atomy usazují co „nejlepší polohy" s nejmenší energií a
    pravděpodobnost změny je menší

  ⇒ na začátku je tedy pravděpodobnost toho, že akceptujeme zhoršování řešení, vyšší
- **Akceptování nového stavu**
  - vždy při zlepšení
  - při zhoršení pouze za dané pravděpodobnosti, která klesá se snížením teploty
- **Cykly algoritmu**
  - vnější: simulace procesu ochlazování snižováním **teploty** T
    čím nižší bude teplota, tím nižší bude pravděpodobnost akceptování zhoršení
  - vnitřní: počítáme, kolikrát jsme neakceptovali zhoršení (dán limit `MaxIter`)

Metropolisovo kritérium

Rozdíl mezi kvalitou nového (δ) a existujícího (θ) řešení

- $\Delta E = E(\delta) - E(\theta)$
- E (chybovost) musí být minimalizováno

Metropolisovo kritérium

- lepší (někdy případně i stejně kvalitní) řešení akceptováno: $\Delta E > 0$
- **horší řešení ($\Delta E > 0$) akceptováno pokud**

$$U < e^{-\Delta E/T}$$

- U náhodné číslo z intervalu $(0, 1)$
- pomůcka: porovnej $e^{-10/100}$ vs. $e^{-100/100}$ a $e^{-10/100}$ vs. $e^{-10/1}$

Algoritmus simulovaného žíhání

```
procedure SA( TInit, TEnd, MaxIter )
θ := náhodné ohodnocení proměnných
α := θ                                        (dosud nejlepší nalezené přiřazení)
for T := TInit to TEnd
    PocetChyb := 0
    while PocetChyb < MaxIter
          vyber lokální změnu z θ do δ
          if E(δ) < E(θ) then                          (akceptuj přiřazení)
             θ := δ
             if E(θ) < E(α) then
                α := θ                                 (nové optimum)
          else generuj náhodné číslo p ∈ [0,1)
               if p < e^((E(θ) − E(δ))/T) then         (akceptuj přiřazení)
                  θ := δ
               else PocetChyb := PocetChyb + 1         (neakceptuj přiřazení)
    T := max(round(0.8×T),TEnd)                        (sniž teplotu)
end SA
```

Lokální prohledávání pro SAT problém

- **SAT problém**: splnitelnost logické formule v konjunktivní normální formě
  - **CNF** = konjunkce klauzulí
  - **klauzule** = disjunkce literálů (podmínka)
  - **literál** = atom nebo negace atomu
  - příklad: $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A)$

  $\Longrightarrow$ CSP nad disjunkcemi boolean proměnných
- SAT je NP-úplný
- LS řeší poměrně velké formule
  - formulace LS je velice přiřozená a jeho použití je velice populární
  - lokální změna je **překlápěním (*flipping*)** hodnoty proměnné
- Algoritmus **GSAT** (*greedy SAT*)
  - postupné překlápění proměnných
  - evaluace udává, jaký je (vážený) počet nesplněných klauzulí

Algoritmus GSAT

```
procedure GSAT(A,MaxPokusu,MaxZmen)    (A je CNF formule)
for i := 1 to MaxPokusu do
    θ := náhodné ohodnocení proměnných
    for j := 1 to MaxZmen do
        if A je splnitelná pomocí θ then
           return θ
        V := proměnná, jejíž změna hodnoty
             nejvíce sníží počet nesplněných klauzulí
        θ := přiřazení, které se liší od θ změnou hodnoty V
return nejlepší θ
```

- Příklad: $\{\neg C, \quad \neg A \vee \neg B \vee C, \quad \neg A \vee D \vee E, \quad \neg B \vee \neg C\}$
  - iniciální přiřazení (všechny proměnné mají hodnotu 1) nesplňuje první a poslední klauzuli
  - změna A, D, E nemá vliv na počet nesplněných klauzulí
  - změna C na 0 splní první i poslední klauzuli ale nesplní $\neg A \vee \neg B \vee C$ (evaluace=1)
  - změna B má evaluaci 1 také, pokud ale změníme C a pak B, pak dostáváme evaluaci 0

Heuristiky pro GSAT

- GSAT lze kombinovat s různými heuristikami, které zvyšují jeho efektivitu
  - obzvláště při řešení strukturovaných problémů
- Použití **náhodné procházky spolu s minimalizací konfliktů**
- **Vážení klauzulí**
  - některé klauzule zůstávají po řadu iterací nesplněné, klauzule tedy mají různou důležitost
  - splnění „těžké" klauzule lze preferovat přidáním váhy
  - váhu může systém odvodit
    - na začátku mají všechny klauzule stejnou váhu
    - po každém pokusu zvyšujeme váhu u nesplněných klauzulí
- **Průměrování řešení**
  - standardně každý pokus začíná z náhodného řešení
  - společné části předchozích řešení lze zachovat
    - restartovací stav se vypočte ze dvou posledních výsledků bitovým srovnáním stejné bity zachovány, ostatní nastaveny náhodně

Hybridní prohledávání

- Příklady kombinace lokálního prohledávání
  - prohledává úplná nekonzistentní přiřazení

  a stromového prohledávání
  - rozšiřuje částečné konzistentní přiřazení

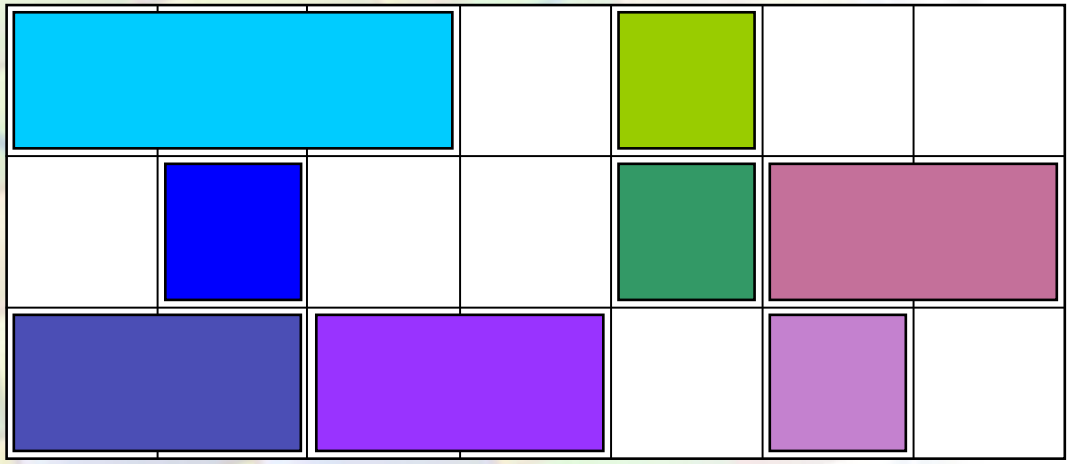
1. Lokální prohledávání **před nebo po** stromovém prohledávání např:
   - před: lokální prohledávání nám poskytne heuristiku na uspořádání hodnot
   - po: lokálním prohledáváním se snažíme lokálně vylepšit spočítané řešení (optimalizace)
2. **Stromové prohledávání** je doplněno lokálním prohledávání
   - v listech prohledávacího stromu i v jeho uzlech
     - např. lokální prohledávání pro výběr hodnoty nebo vylepšení spočítaného řešení
3. **Lokální prohledávání** je doplněno stromovým prohledáváním
   - pro výběr souseda z okolí a nebo pro prořezávání stavového prostoru

Iterativní dopředné prohledávání

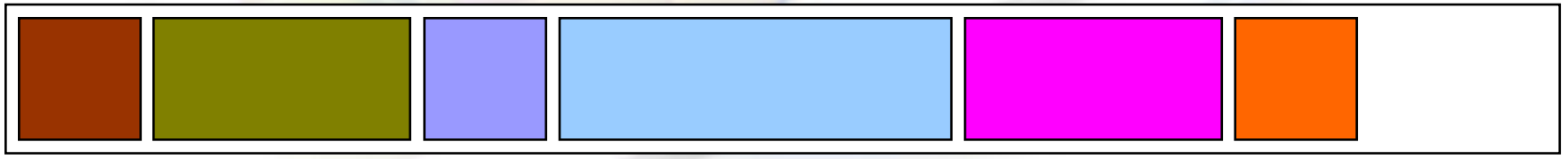
- ***Iterative Forward Search (IFS)***
- **Hybridní prohledávání: konstruktivní nesystematický algoritmus**
  - pracuje nad **modelem s pevnými a měkkými omezujícími podmínkami**
  - pevné podmínky: musí být splněny
  - měkké podmínky: reprezentují účelové funkce, jejichž vážený součet je minimalizován
- Pracuje s **konzistentními přiřazeními**
- Základní myšlenky (blízký dynamickému backtrackingu)
  - začíná s prázdným přiřazením
  - vybere novou proměnnou k přiřazení
  - pokud nalezne konflikt,
    zruší přiřazení všech proměnných v konfliktu s vybranou proměnnou
  - výběr hodnot pomocí **konfliktní statistiky**
  - výběr proměnných není pro algoritmus kritický,
    protože lze proměnné přiřadit opakovaně

Iterative Forward Search Algorithm

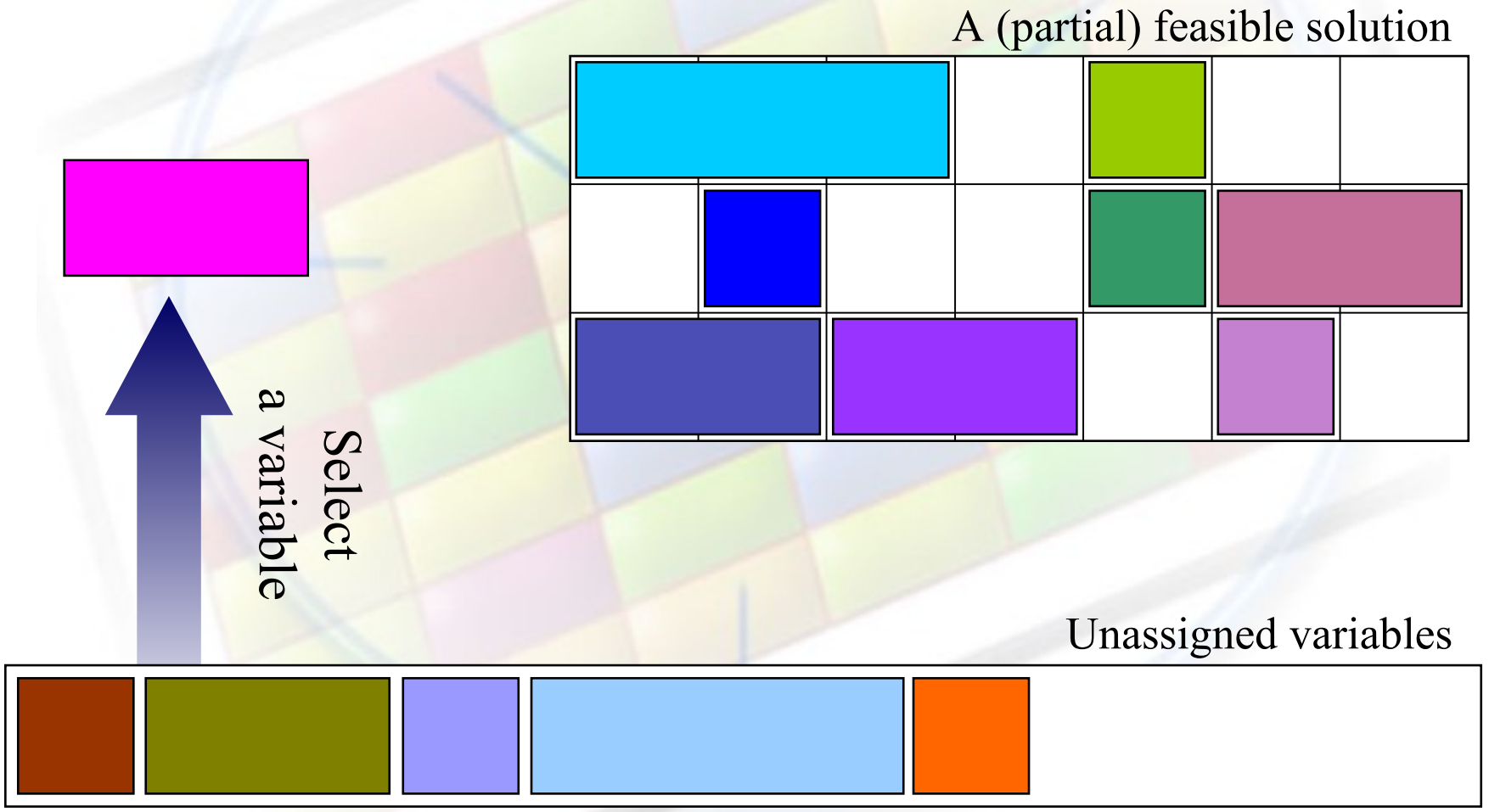
A (partial) feasible solution



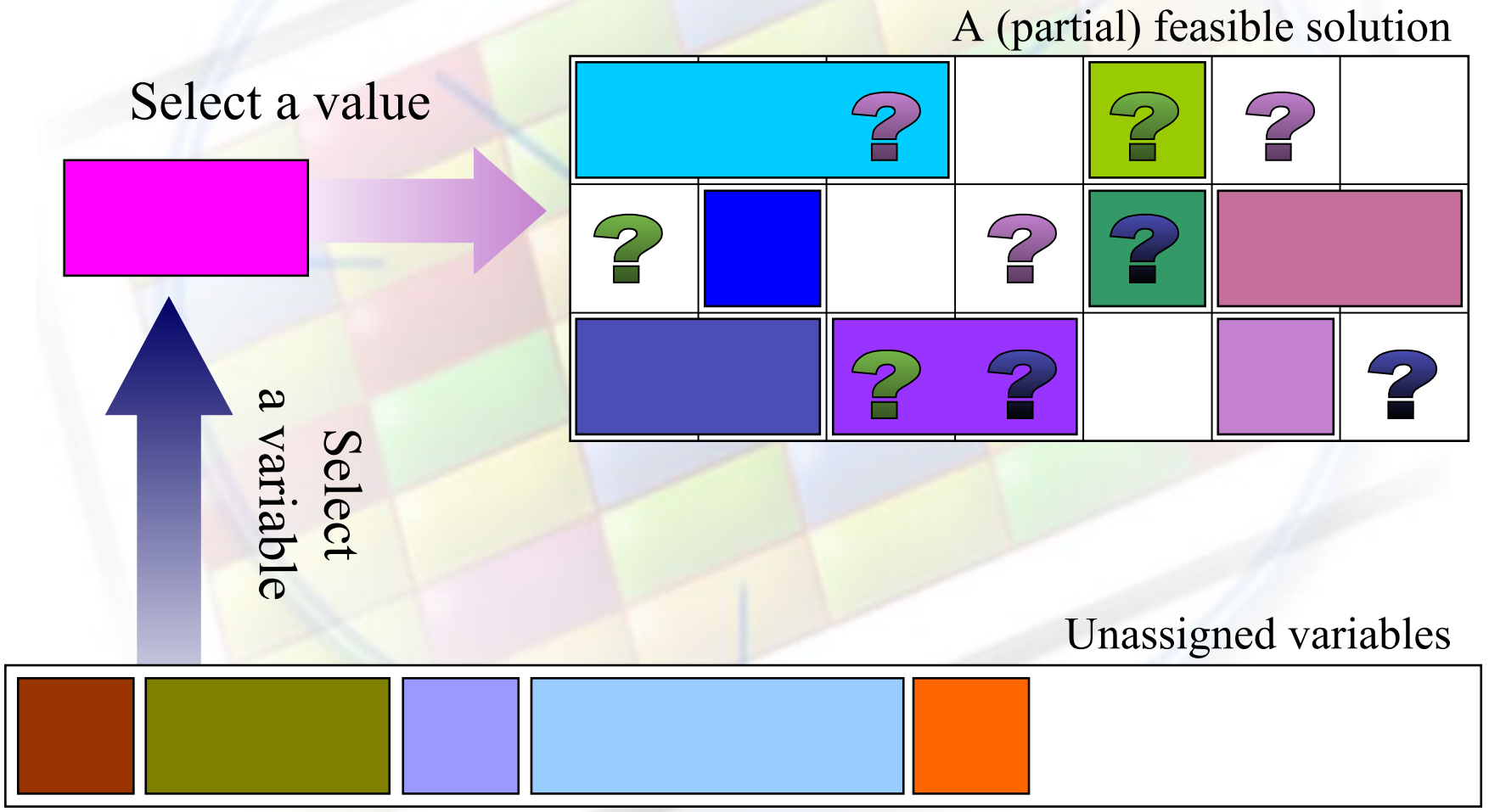
Unassigned variables



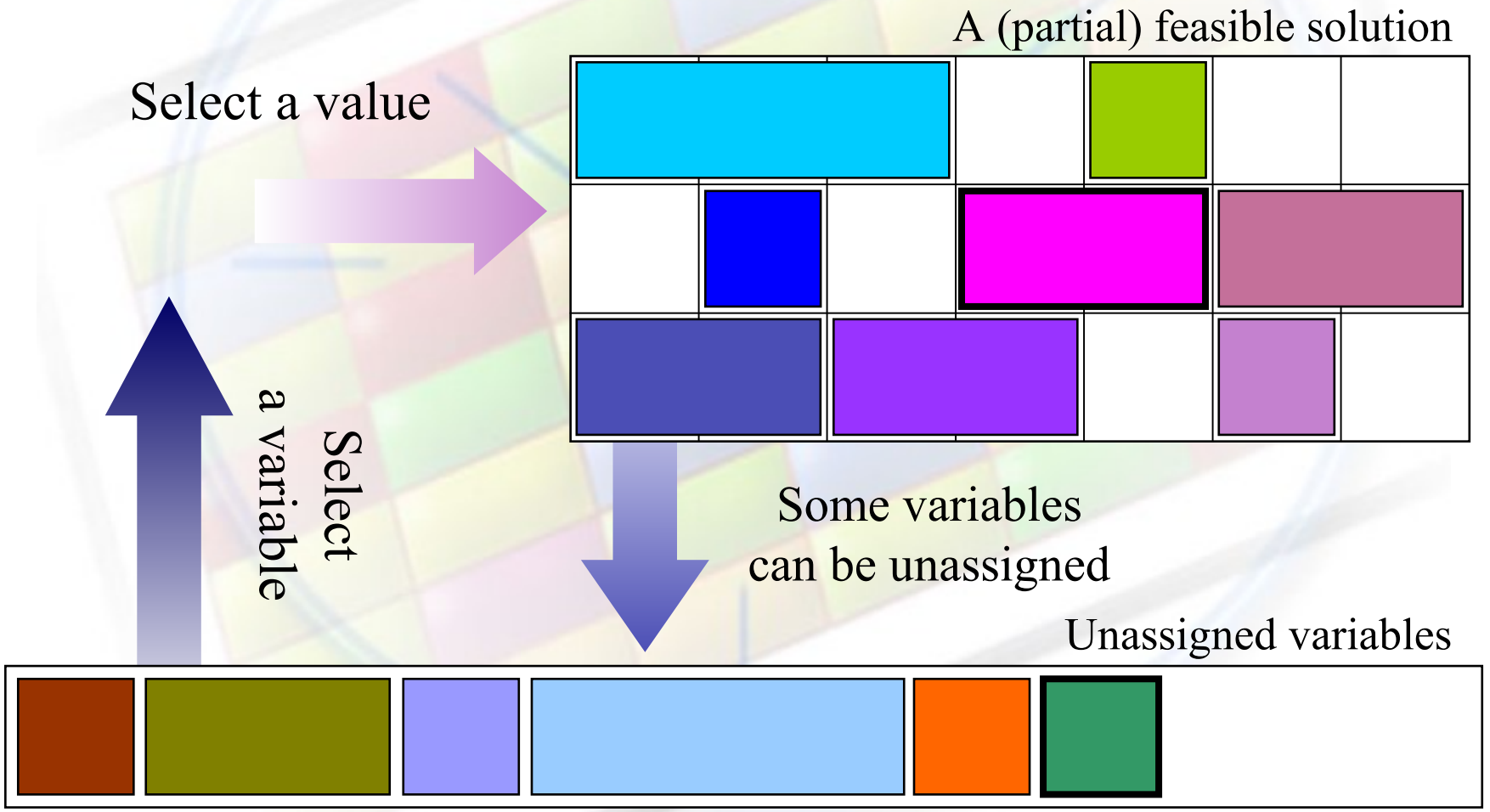
Iterative Forward Search Algorithm



Iterative Forward Search Algorithm



Iterative Forward Search Algorithm



IFS: algoritmus

```
procedure IFS()
iteration = 0;                % čítač iterací
current = ∅;                  % aktuální řešení
best = ∅;                     % nejlepší řešení
while canContinue (current, iteration) do
    iteration = iteration + 1;
    variable = selectVariable (current);
    value = selectValue (current, variable);
    unassign(current, conflictingVariables(current, variable, value));
    assign(current, variable, value);
    if better (current, best) then best = current
return best
end IFS procedure
```

conflictingVariables: kontroluje konzistenci tak, aby byla splněna omezení na přiřazených proměnných, a vrací konfliktní proměnné

unassign: odstraní přiřazení konfliktních proměnných

IFS: konfliktní statistika

- Předpoklad: při výběru hodnoty a proměnné A

  je nutné zrušit přiřazení hodnoty b proměnné B, tj. $[A = a \rightarrow \neg\, B = b]$

- V průběhu výpočtu si tedy lze pamatovat:

  $A = a \quad \Rightarrow \quad 3 \times \neg\, B = b, \quad 4 \times \neg\, B = c, \quad 1 \times \neg\, C = a, \quad 120 \times \neg\, D = a$

- **Při výběru hodnoty**
  - vybíráme hodnoty s nejnižším počtem konfliktů vážených jejich frekvencí
    - konflikt započítáme pouze tehdy, pokud to vede k odstranění přiřazení
  - př. $A = a \quad \Rightarrow \quad 3 \times \neg\, B = b, \quad 4 \times \neg\, B = c, \quad 1 \times \neg\, C = a, \quad 120 \times \neg\, D = a$

    $A = b \quad \Rightarrow \quad 1 \times \neg\, B = a, \quad 3 \times \neg\, B = b, \quad 2 \times \neg\, C = a$

    Máme přiřazení $B = c, C = a, D = b$ a vybíráme hodnotu pro A:
    - nechť A/a vede ke konfliktu s B/c: vyhodnoceno jako 4
      - není konflikt s C/a, tak se nezapočítává
    - nechť A/b vede ke konfliktu s C/a: vyhodnoceno jako 2
    - tj. vybereme hodnotu b pro proměnnou A