IB107 Vyčíslitelnost a složitost

standardní numerace r.e. množin

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

alternativní charakterizace r.e. množin

Věta

1. *Množina* $A \subseteq \mathbb{N}$ *je rekurzivně spočetná, právě když* $A = dom(g)$ *pro nějakou vyčíslitelnou funkci* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. *Množina* $A \subseteq \mathbb{N}$ *je rekurzivně spočetná, právě když* $A = range(g)$ *pro nějakou vyčíslitelnou funkci* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

alternativní charakterizace r.e. množin

Důkaz:

1. A je r.e. $\iff$ $\exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = dom(g)$

$\Longrightarrow$
- $A = \emptyset$
- $A \neq \emptyset$ je r.e., pak $A = range(f)$ pro tot. vyčíslitelnou funkci f

alternativní charakterizace r.e. množin

1. A je r.e. $\iff$ $\exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = dom(g)$

$\Longleftarrow$

- $A = dom(g) = \emptyset$
- $A = dom(g) \neq \emptyset$, pak nechť $a_0 \in A$

alternativní charakterizace r.e. množin

2. A je r.e. $\iff$ $\exists$ vyčíslitelná funkce g tak, že $A = range(g)$

$\Longrightarrow$

- $A = \emptyset$
- $A \neq \emptyset$ je r.e., pak $A = range(f)$ pro tot. vyčíslitelnou funkci f
- položíme $g = f$

$\Longleftarrow$

- $A = range(g) = \emptyset$
- $A = range(g) \neq \emptyset$, pak nechť $a_0 \in A$

možné numerace r.e. množin

$$dom(\varphi_0), dom(\varphi_1), dom(\varphi_2), \ldots$$

$$range(\varphi_0), range(\varphi_1), range(\varphi_2), \ldots$$

Věta

Existují totálně vyčíslitelné funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí vztahy:

1. $dom(\varphi_i) = range(\varphi_{f(i)})$
2. $range(\varphi_i) = dom(\varphi_{g(i)})$

možné numerace r.e. množin

Důkaz:

1. $dom(\varphi_i) = range(\varphi_{f(i)})$

2. $range(\varphi_i) = dom(\varphi_{g(i)})$

■

standardní numerace r.e. množin

Definice (standardní numerace r.e. množin)

Standardní numerací r.e. množin nazveme funkci $W : \mathbb{N} \to \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ je r.e.}\}$ *definovanou vztahem*

$$W(i) = dom(\varphi_i).$$

Index r.e. množiny $A \subseteq \mathbb{N}$ *je číslo* i *splňující* $A = W(i)$.

- místo $W(0), W(1), \ldots$ píšeme $W_0, W_1, \ldots$
- množinu W_i lze chápat jako akceptovanou programem P_i: program P_i akceptuje $n \in \mathbb{N}$, jestliže P_i zastaví pro vstup n

r.e. relace a standardní numerace r.e. relací

Definice (rekurzivně spočetná relace)

Relace $A \subseteq \mathbb{N}^j$ je rekurzivně spočetná (r.e.), právě když existuje vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$ taková, že $A = dom(f)$.

Definice (standardní numerace r.e. relací)

Standardní numerací j-árních r.e. relací nazveme funkci $W^{(j)} : \mathbb{N} \to \{A \subseteq \mathbb{N}^j \mid A \text{ je r.e.}\}$ definovanou vztahem

$$W^{(j)}(i) = dom(\varphi_i^{(j)}).$$

Index r.e. relace $A \subseteq \mathbb{N}^{(j)}$ je číslo i splňující $A = W^{(j)}(i)$.

Místo $W^{(j)}(0), W^{(j)}(1), \ldots$ píšeme $W_0^{(j)}, W_1^{(j)}, \ldots$.