IB107 Vyčíslitelnost a složitost

Riceovy věty

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

respektování funkcí

Definice (respektování funkcí)

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce, jestliže platí

$$i \in A \text{ a } \varphi_i = \varphi_j \implies j \in A.$$

- A respektuje funkce, právě když $\overline{A}$ respektuje funkce
- $\emptyset$, $\mathbb{N}$
- konečná neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{N}$
- $\{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$
- $\{i \mid W_i = \{42\}\}$

1. Riceova věta

Věta (1. Riceova věta)

Neprázdná vlastní podmnožina $\mathbb{N}$ *(tedy* A *splňující* $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{N}$*), která respektuje funkce, není rekurzivní.*

Důkaz: (sporem)

- předpokládejme, že A je rekurzivní
- nechť ϵ je prázdná funkce ($dom(\epsilon) = \emptyset$) a $\{i \mid \varphi_i = \epsilon\} \subseteq \overline{A}$
- nechť θ je nějaká vyč. funkce splňující $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- nechť $f(i)$ je tot. vyčíslitelná funkce vracející kód programu

$$\underline{\textbf{begin}}\ x_2 := \Phi(i, i);\ x_1 := \theta(x_1)\ \underline{\textbf{end}}$$

- tedy $f(i) \in A \iff i \in K$ a tudíž K je rekurzivní (**spor**) ■

použití 1. Riceovy věty

$A = \{i \mid \varphi_i \text{ je prostá}\}$ není rekurzivní

Existují nerekurzivní množiny, které nerespektují funkce.
(Jejich nerekurzivita není důsledkem 1. Riceovy věty.)

důsledky 1. Riceovy věty

1. Množina všech indexů programů s daným vstupně-výstupním chováním, která není rovna $\emptyset$ nebo $\mathbb{N}$, není rekurzivní.

2. Není rozhodnutelné, zda má funkce φ_i danou netriviální vlastnost, která není závislá na jejím indexu.

1. Riceova věta pro relace

Definice (respektovaní funkcí relacemi)

Množina $R \subseteq \mathbb{N}^k$ *respektuje funkce, jestliže* $(a_i, \ldots, a_k) \in R$ *a* $\varphi_{a_1} = \varphi_{b_1}, \ldots, \varphi_{a_k} = \varphi_{b_k}$ *implikuje* $(b_1, \ldots, b_k) \in R$.

- $\{(i, j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
- $\{(i, j, k) \mid \varphi_i(3) + \varphi_j(4) = \varphi_k(5)\}$

Věta (1. Riceova věta pro relace)

Nechť $R \subseteq N^k$ *respektuje funkce. Pak* R *je rekurzivní, právě když* $R = \emptyset$ *nebo* $R = \mathbb{N}^k$.

2. Riceova věta

Věta (2. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ respektuje funkce a nechť existují vyčíslitelné funkce $\theta, \theta' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $\theta \leq \theta'$ a dále:

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i = \theta'\} \subseteq \overline{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\xi(i,j) = \begin{cases} \theta'(j) & \text{je-li } \varphi_i(i) \text{ definováno} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- ξ je vyčíslitelná (příklad 2.10 ze cvičení)
- existuje TVF f splňující $\xi(i,j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- pak $f(i) \in A \iff i \in \overline{K}$, tedy $\overline{K} = f^{-1}(A)$
- vzor r.e. množiny při TVF f je r.e. množina
- ovšem $\overline{K}$ není r.e. a proto ani A není r.e. ∎

použití 2. Riceovy věty

$B = \{i \mid \varphi_i \text{ není totální}\}$ není r.e.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to dokázat 2. Riceovou větou. Například $\{i \mid \varphi_i(x) = 1 \text{ pro všechna } x\}$.

3. Riceova věta

Věta (3. Riceova věta)

Nechť $A \subseteq \mathbb{N}$ *respektuje funkce a nechť existuje vyčíslitelná funkce* $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *splňující:*

- $\{i \mid \varphi_i = \theta\} \subseteq A$
- $\{i \mid \varphi_i \leq \theta \text{ a } dom(\varphi_i) \text{ je konečná množina}\} \subseteq \overline{A}$

Pak A není r.e.

Důkaz:

$$\mu(i, j) = \begin{cases} \perp & \text{jestliže } P_i \text{ zastaví na } i \text{ během } j \text{ kroků} \\ \theta(j) & \text{jinak} \end{cases}$$

- μ je vyčíslitelná
- existuje TVF f splňující $\mu(i, j) = \varphi_{f(i)}(j)$ (translační lemma)
- $i \in \overline{K} \implies \varphi_{f(i)} = \theta \implies f(i) \in A$
- $i \in K \implies dom(\varphi_{f(i)})$ a $\varphi_{f(i)} \leq \theta \implies f(i) \in \overline{A}$
- celkem $i \in \overline{K} \iff f(i) \in A$, tedy $\overline{K} = f^{-1}(A)$ ... ■

použití 3. Riceovy věty

$C = \{i \mid \varphi_i = f\}$, kde f je pevně zvolená totálně vyčíslitelná funkce, není r.e.

Množina všech indexů programů s daným nekonečným vstupně-výstupním chováním není rekurzivně spočetná.

Existují množiny, které nejsou r.e. a nelze to o nich dokázat Riceovými větami.