2.6 Ukažte, že existuje totálně vyčíslitelná funkce $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\varphi_{\underline{g(i,j)}}(x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$$

přičemž součet je definován právě pro ta x, pro která jsou definovány obě funkce φ_i, φ_j.

$\varphi_{\underline{i}}$ i - index programu / fcie ktorú ten prog. počíta

1) (Neformálny) argument že sa to dá

Ako pracuje g? Mám vzor

$$\left[\begin{array}{l} f_i = \Phi([i], x) \\ f_j = \Phi([j], x) \\ \text{return } f_i + f_j \end{array}\right.$$

1. zoberie vstup i a j.
2. „Dosadí" ich do vzoru
3. Vráti kód vzniknutého programu v štand. numerácií.

Věta (věta o parametrizaci, s_n^m věta (Kleene))

Pro každá $m, n \geq 1$ existuje totálně vyčíslitelná funkce $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $e, y_1, \ldots, y_{m+n} \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,y_1,\ldots,y_m)}(y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) = \varphi^{(m+n)}_e(y_1, \ldots, y_{m+n}).$$

e – kód programu/fcie ktorý je náš vzor/template

input (i, j, x):
  return $\Phi(i,x) + \Phi(j,x)$ } Program e' (počíta $\varphi_{e'}(i,j,x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$)

g(i,j) definujeme ako s(e', i, j)

keďže s je tot. vyč., tak aj g je tot. vyč.

$$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_{s(e',i,j)}(x) = \varphi_{e'}(i,j,x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$$

$n, x)$

Důsledek (translační lemma)

Ke každé vyčíslitené funkci $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *existuje tot. vyčíslitelná funkce* $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *taková, že pro všechna* $x, y \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f(x, y) = \varphi_{r(x)}(y).$$

obecnější: $f(x,y,z) = \varphi_{r(x,y)}(z)$

$f(x,y,z) = \Phi_x(z) + \Phi_y(z)$ → je vyčíslitelná (viď Program e')

Podľa trans. lemma $g(i,j)$ je presne $r(i,j)$

resp. $r(x,y)$

$r(x)$

Ak $\zeta(x) = y$, tak $\mu(x) = y$

Ak $\zeta(x) = \perp$, tak $\mu(x)$ je ľubovoľné.
(cykli)

2.8 Nechť ψ_0
a která ne
totální fu
kvazi-efek

Pozname

Dokažte,
je vyčíslit

2.10 Zjistěte, která z následujících funkcí je vyčíslitelná a výsledek zdůvodněte:

(a) $\psi_1(x,y) = \begin{cases} y & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$

$= \varphi_x(x)$ zastaví

(b) $\psi_2(x,y) = \begin{cases} y & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

μ rozširuje ζ

(c) Nechť $\mu, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou vyčíslitelné funkce takové, že $\sigma \leq \mu$.

$$\psi_3(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ \sigma(y) & \text{jinak} \end{cases}$$

„Preťažíme" si μ a ζ

$\mu = \varphi_m$

$\sigma = \varphi_2$

(a) Áno Program pre ψ_1:

$\Phi(x, x)$
return y

Veľké ψ!

miro

(b) Nie   Sporom: Nech ψ_2 je vyčísliteľná.

$$halt(x) = \begin{cases} 1 & \varphi_x(x) \text{ zastaví} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Implementujeme halt pomocou ψ_2

$$halt(x) = \psi_2(x, \overset{y}{1})$$

$$\underbrace{\psi_2 \text{ je vyč.} \Rightarrow halt \text{ je vyč. ALE } halt \text{ nie je vyč.}}_{}$$

SPOR $\Rightarrow$ teda ψ_2 nie je vyč.

(c) Áno $A \check{z}$ z zastaví, nezáleží na $\varphi_x(x)$, lebo M počíta to čo z Ab

$A\check{z}$ $\varphi_x(x)$ zastaví, nezáleží na z, lebo som v prvej vetve

Step counter: $Sc(i, x, n) = \begin{cases} 1 & \varphi_i(x) \text{ zastaví do } n \text{ krokov} \\ 0 & \end{cases}$

i → program, x → vstup, n → kroky

Program pre $\varphi_3(x,y)$:

```
n = 0          φ_x(x)          z(y)
while Sc(x,x,n) = 0 ∧ Sc(z,y,n) = 0
    n = n+1
if Sc(z,y,n) = 1     // z(y) skončí
    return Φ(z,y)
else     // φ_x(x) skončí
    return Φ(μ,y)
```

$$\varphi_3(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{ak } \varphi_x(x) \neq \perp \\ z(y) \end{cases}$$

Možné situácie?

1. $\varphi_x(x)$ cyklí a $z(y)$ cyklí

   $\Rightarrow \varphi_3$ cyklí

2. $\varphi_x(x)$ zastaví

   $\Rightarrow \varphi_3 = \mu(y)$

3. $z(y)$ zastaví   z definície $z \le \mu$

   $\Rightarrow \varphi_3 = z(y) = \mu(y)$

2.8 Nechť $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ je libovolná numerace vyčíslitelných funkcí, která nemusí být efektivní a která nemusí obsahovat všechny vyčíslitelné funkce, t.j. jestliže položíme $\psi_n = \varphi_{f(n)}$, pak f je totální funkce, která nemusí být ani vyčíslitelná ani surjektivní. Takovouto numeraci nazveme *kvazi-efektivní*, jestliže existuje totálně vyčíslitelná funkce $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že:

$f(0) \neq g(0)$ ALE funkcia $\varphi_{f(0)}$ je rovnaká ako $\varphi_{g(0)}$

$$\varphi_{f(0)} = \varphi_{g(0)}, \varphi_{f(1)} = \varphi_{g(1)}, \ldots, \varphi_{f(n)} = \varphi_{g(n)}, \ldots$$

Poznamenejme, že to nemusí nutně znamenat, že $f = g$.

Dokažte, že numerace ψ_n je kvazi-efektivní, právě když její univerzální funkce $\Psi(n, x) = \psi_n(x)$ je vyčíslitelná.

f(program v numerácii ψ) = ekviv. program v numerácii φ

Nepoznáme program pre f.

$\Psi(n,x) = \psi_n(x)$ je vyčíslitelná $\Leftrightarrow$ $\psi_0 \ldots$ je kvazi-efektívna.

($\Leftarrow$) Viem: $\psi_0 \ldots$ je kvazi-ef. $\Rightarrow$ existuje f a g, $g = \varphi_g$

Chcem: $\Psi(n,x)$ je vyčíslitelná

$\Psi(n,x) = \Phi(\Phi(g,n),x)$ // $\varphi_{g(n)}(x)$

$\Psi(n,x) = \varphi_{g(n)}(x) = \varphi_{f(n)}(x) = \psi_n(x)$

(⇒) Viem: $\Psi(n,x)$ je vyčísliteľná

Chcem: $\varphi_0 \dots$ je kvazi-efektívna

$\Psi(n,x) = \varphi_n(x)$

Pozorovanie: $g(n)$ počíta $\Psi(n,x)$ so zafixovaným n.

Podľa trans. lemma existuje $r(x)$

t.ž.

$$\Psi(n,x) = \varphi_{r(n)}(x)$$

$f = \Psi$

to čo ?

Aby $\varphi_0 \dots$ bola kvazi efektívna,

ej vetve

do n krokov

potrebujem TV g. Ale g je presne $r(x)$ z trans. lemmatu. □

↓

totálne vyčísliteľné

g (resp. r) priradí index z Ψ index z φ

... code progra...

input (i,j,x):

return $\Phi(i,x$...

$g(i,j)$ definujeme ...

každé s je tot. ...

$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_{s(\dots}$

Důsledek (translační lemm...

Ke každé vyčíslitelné funkc... funkce $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ taková, ž...

$f(x, \dots$

obecnejšie: $f(x,y \dots$

$f(x,y,z) = \Phi \dots$

Podľa trans. lem...

Ak $\sigma(x) = y$, tak $\mu(x) = y$

Ak $\sigma(x) = \perp$, tak $\mu(x)$ je ľubovoľné.
(cyklí)

2.10 Zjistěte, která z následujících funkcí je vyčíslitelná a výsledek zdůvodněte:

(a) $\psi_1(x,y) = \begin{cases} y & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$ $= \varphi_x(x)$ zastaví

(b) $\psi_2(x,y) = \begin{cases} y & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

(c) Nechť $\mu, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou vyčíslitelné funkce takové, že $\sigma \leq \mu$. μ rozširuje σ

$\psi_3(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{jestliže } \varphi_x(x) \text{ je definováno;} \\ \sigma(y) & \text{jinak} \end{cases}$

Preťažíme si μ a σ

$\mu = \varphi_\mu$

$\sigma = \varphi_\sigma$

(a) Áno Program pre ψ_1: $\begin{cases} \Phi(x,x) \\ \text{return } y \end{cases}$

(b) Nie Sporom: Nech ψ_2 je vyčíslitelná.

$\text{halt}(x) = \begin{cases} 1 & \varphi_x(x) \text{ zastaví} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

Implementujeme halt pomocou ψ_2

$\text{halt}(x) = \psi_2(x, 1)$

ψ_2 je vyč. $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{halt je vyč. ALE halt nie je vyč.}}$

SPOR $\Rightarrow$ teda ψ_2 nie je vyč.

(c) Áno Ak σ zastaví, nezáleží na $\varphi_x(x)$, lebo μ počíta to čo σ

Ak $\varphi_x(x)$ zastaví, nezáleží na σ, lebo som v prvej vetve

Step counter: $Sc(i, x, n) = \begin{cases} 1 & \varphi_i(x) \text{ zastaví do } n \text{ krokov} \\ 0 \end{cases}$

i – program, x – vstup, n – kroky

Program pre $\psi_3(x,y)$:

```
n = 0
while Sc(x,x,n) = 0 ∧ Sc(σ,y,n) = 0      // φ_x(x), σ(y)
    n = n+1
if Sc(σ,y,n) = 1      // σ(y) skončí
    return Φ(σ,y)
else      // φ_x(x) skončí
    return Φ(μ,y)
```

$\psi_3(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & \text{ak } \varphi_x(x) \neq \perp \\ \sigma(y) \end{cases}$

Možné situácie?

1. $\varphi_x(x)$ cyklí a $\sigma(y)$ cyklí
$\Rightarrow \psi_3$ cyklí

2. $\varphi_x(x)$ zastaví
$\Rightarrow \psi_3 = \mu(y)$

3. $\sigma(y)$ zastaví z definície $\sigma \leq \mu$
$\Rightarrow \psi_3 = \sigma(y) = \mu(y)$

nemusí mať univerzálnu funkciu

2.8 Nechť $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ je libovolná numerace vyčíslitelných funkcí, která nemusí být efektivní a která nemusí obsahovat všechny vyčíslitelné funkce, t.j. jestliže položíme $\psi_n = \varphi_{f(n)}$, pak f je totální funkce, která nemusí být ani vyčíslitelná ani surjektivní. Takovouto numeraci nazveme *kvazi-efektivní*, jestliže existuje totálně vyčíslitelná funkce $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že:

$f(0) \neq g(0)$ ALE funkcia $\varphi_{f(0)}$ je rovnaká ako $\varphi_{g(0)}$

$$\varphi_{f(0)} = \varphi_{g(0)}, \varphi_{f(1)} = \varphi_{g(1)}, \ldots, \varphi_{f(n)} = \varphi_{g(n)}, \ldots$$

Poznamenejme, že to nemusí nutně znamenat, že $f = g$.

Dokažte, že numerace ψ_n je kvazi-efektivní, právě když její univerzální funkce $\Psi(n,x) = \psi_n(x)$ je vyčíslitelná.

f(program v numerácii ψ) = ekviv. program v numerácii φ

Nepoznáme program pre f.

$\Psi(n,x) = \psi_n(x)$ je vyčíslitelná $\Leftrightarrow \psi_0 \ldots$ je kvazi-efektívna.

($\Leftarrow$) Viem: $\psi_0 \ldots$ je kvazi-ef. $\Rightarrow$ existuje f a g, $g = \varphi_g$

Chcem: $\Psi(n,x)$ je vyčíslitelná

Veľké Ψ (univ. funkcia numerácie ψ)

$\Psi(n,x) = \Phi(\Phi(g,n), x)$ // $\varphi_{g(n)}(x)$

$\Psi(n,x) = \varphi_{g(n)}(x) = \varphi_{f(n)}(x) = \psi_n(x)$

($\Rightarrow$) Viem: $\Psi(n,x)$ je vyčíslitelná

Chcem: $\psi_0 \ldots$ je kvazi-efektívna

$\Psi(n,x) = \psi_n(x)$ Pozorovanie: $g(n)$ počíta $\Psi(n,x)$ so zafixovaným n.

Podľa trans. lemma existuje $r(x)$ t.ž.

$\Psi(n,x) = \varphi_{r(n)}(x)$ $f = \Psi$

Aby $\psi_0 \ldots$ bola kvazi efektívna, potrebujem TV g. Ale g je presne $r(x)$ z trans. lemmatu. $\square$

totálne vyčíslitelné

g (resp. r) priradí index z Ψ index z φ

2.6 Ukažte, že existuje totálně vyčíslitelná funkce $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$$

přičemž součet je definován právě pro ta x, pro která jsou definovány obě funkce φ_i, φ_j.

φ_i i – index programu / fcie ktorú ten prog počíta

1) (Neformálny) argument že sa to dá

Ako pracuje g? Mám vzor $\begin{cases} f_i = \Phi([i], x) \\ f_j = \Phi([j], x) \\ \text{return } f_i + f_j \end{cases}$

1. Zoberie vstup i a j.
2. „Dosadí" ich do vzoru
3. Vráti kód vzniknutého programu v štand. numerácii.

Věta (věta o parametrizaci, s_n^m věta (Kleene))

Pro každá $m, n \geq 1$ existuje totálně vyčíslitelná funkce $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $e, y_1, \ldots, y_{m+n} \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)}(y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) = \varphi_e^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_{m+n}).$$

e – kód programu / fcie ktorý je náš vzor/template

input (i,j,x):
return $\Phi(i,x) + \Phi(j,x)$ } Program e' (počíta $\varphi_{e'}(i,j,x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$)

$g(i,j)$ definujeme ako $s(e', i, j)$

keďže s je tot. vyč., tak aj g je tot. vyč.

$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_{s(e',i,j)}(x) = \varphi_{e'}(i,j,x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$

Důsledek (translační lemma)

Ke každé vyčíslitené funkci $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ existuje tot. vyčíslitelná funkce $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f(x,y) = \varphi_{r(x)}(y).$$

obecnejšie: $f(x,y,z) = \varphi_{r(x,y)}(z)$

$f(x,y,z) = \Phi_x(z) + \Phi_y(z) \to$ je vyčíslitelná (viď Program e')

Podľa trans. lemma $g(i,j)$ je presne $r(i,j)$ resp. $r(x,y)$