4.2 Nechť $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Nechť $A \oplus B = \{2a \mid a \in A\} \cup \{2b+1 \mid b \in B\}$. Dokažte, že

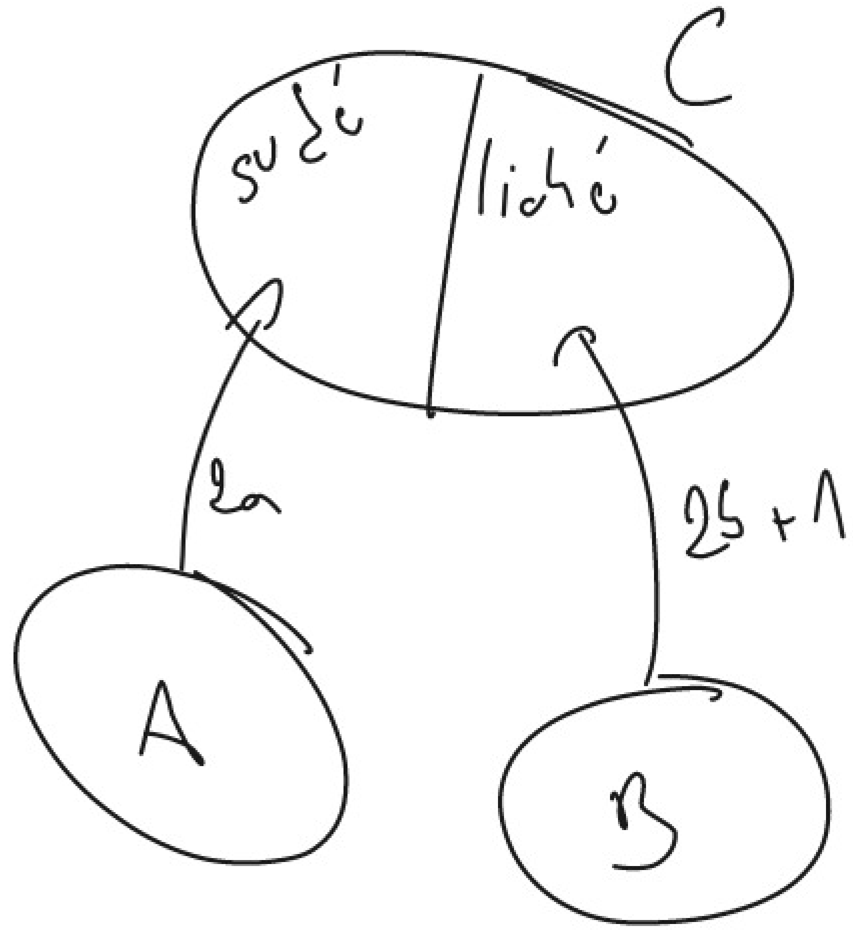
oplus

$C = A \oplus B$

Rek. sú uzavreté na zjednotenie

udé

x je liché



(a) A je rekurzívní a B je rekurzívní právě když $A \oplus B$ je rekurzívní,

4.2 Nech

1a) $\Rightarrow$ A je R $\wedge$ B je R $\Rightarrow$ $A \oplus B$ je R

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A' \\ 0 & x \notin A' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\{2a \mid a \in A\}$ je R a $\{2b+1 \mid b \in B\}$

$\{2a \mid a \in A\} = A'$, $\{2b+1 \mid b \in B\} = B'$

$$\chi_{A'}(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je liché} \\ \chi_A\left(\frac{x}{2}\right) & x \text{ je sudá} \end{cases}$$

$$\chi_{B'}(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je sudé} \\ \chi_B\left(\frac{x-1}{2}\right) & x \text{ je liché} \end{cases}$$

$\chi_{A'}$ je vyčíslitelná lebo χ_A je vyč.

$\Leftarrow$ $A \oplus B$ je R $\Rightarrow$ A je R a B je R

$A \oplus B = C$

Mám χ_C i Chcem χ_A a χ_B

$$\chi_A(x) = \chi_C(2x) \qquad \chi_B(x) = \chi_C(2x+1)$$

miro

(b) A je rekurzívně spočetná a B je rekurzívně spočetná právě když $A \oplus B$ je rekurzívně spočetná.

b) $\Rightarrow$ A je R.E. a B je R.E. $\Rightarrow$ $A \oplus B$ je R.E.

$A \to f_A$, $B \to f_B$, $A \oplus B = C \to f_C$

$$\left[\; A \text{ je R.E.} \iff \exists \text{ vyč. fcia } f \text{ t.ž. } A = \mathrm{domain}(f) \;\right]$$

$$f_{A'}(x) = \begin{cases} \perp & x \text{ je liché} \\ f_A\left(\frac{x}{2}\right) & x \text{ je sudé} \end{cases} \qquad f_{B'}(x) = \begin{cases} \perp & x \text{ je sudé} \\ f_B\left(\frac{x-1}{2}\right) & x \text{ je liché} \end{cases}$$

.my

$$f_C(x) = \begin{cases} f_A\left(\frac{x}{2}\right) & x \text{ je sudé} \\ f_B\left(\frac{x-1}{2}\right) & x \text{ je liché} \end{cases}$$

-sé problémy

pinované}

f_A, f_B aj f_C sú vyčíslitelné

$\Leftarrow$ $A \oplus B$ je R.E. $\Rightarrow$ A je R.E. a B je R.E.

e definovaní)

Mám f_C ; Chcem f_A a f_B

$$f_A(x) = f_C(2x) \qquad f_B(x) = f_C(2x+1)$$

miro

...ONÁ NUMERÁCIA

...krokov $P_1\ P_2 \dots$

...čísl. fcií $\varphi_1\ \varphi_2 \dots$

... množín $W_1\ W_2 \dots$

$A' = f(A)$ → totálne vyčíslitelná fcia

NEPLATÍ ŽE

A je $R \Rightarrow A'$ je R

Protipríklad $A = \mathbb{N}$ f = numerácia

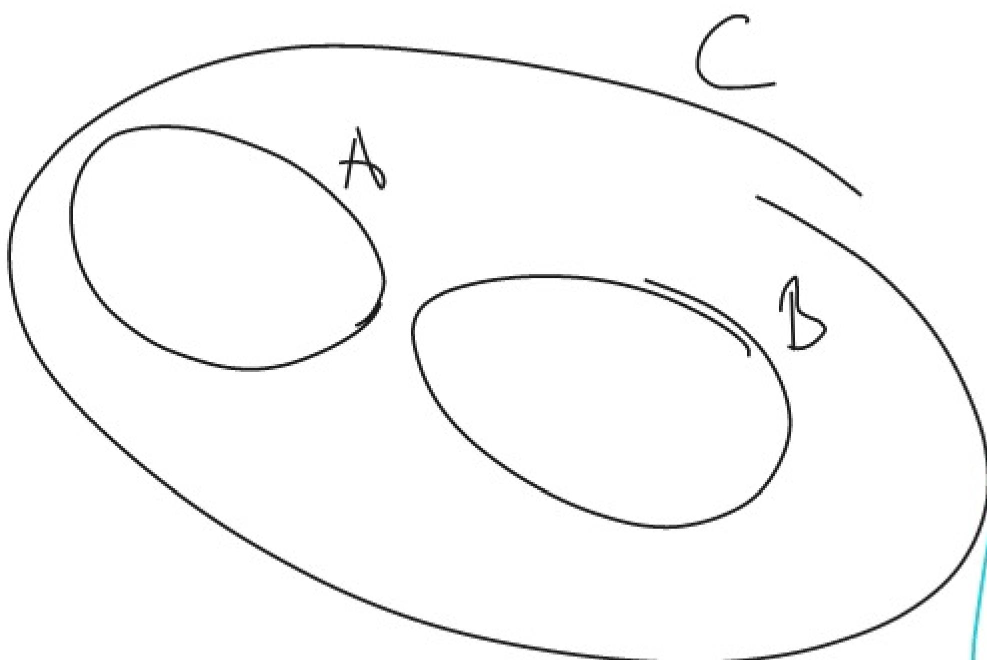
3.6 Uveďte příklad množiny, která není r.e. a která má nekonečnou rekurzívní podmnožinu a nerekurzívní r.e. podmnožinu.

(b) A je rekurz... spočetná.

C: nie je R.E.

B: je nekonečná a je Rekurzívna

A: nie je Rek. a je R.E.



$\Lambda b) \Rightarrow$

A

~~$C = \overline{K}$~~ ~~$A = K$~~ ~~$K \subseteq \overline{K}$~~

$C = \overline{K} \oplus K$

$A = \{x \in C \mid x \text{ je liché}\}$

$= \{2x+1 \mid x \in K\}$

$B = \{2x \mid \varphi_x(x) \text{ zastaví do 10 krokov}\}$

Odbočka

Rekurzívna množiny

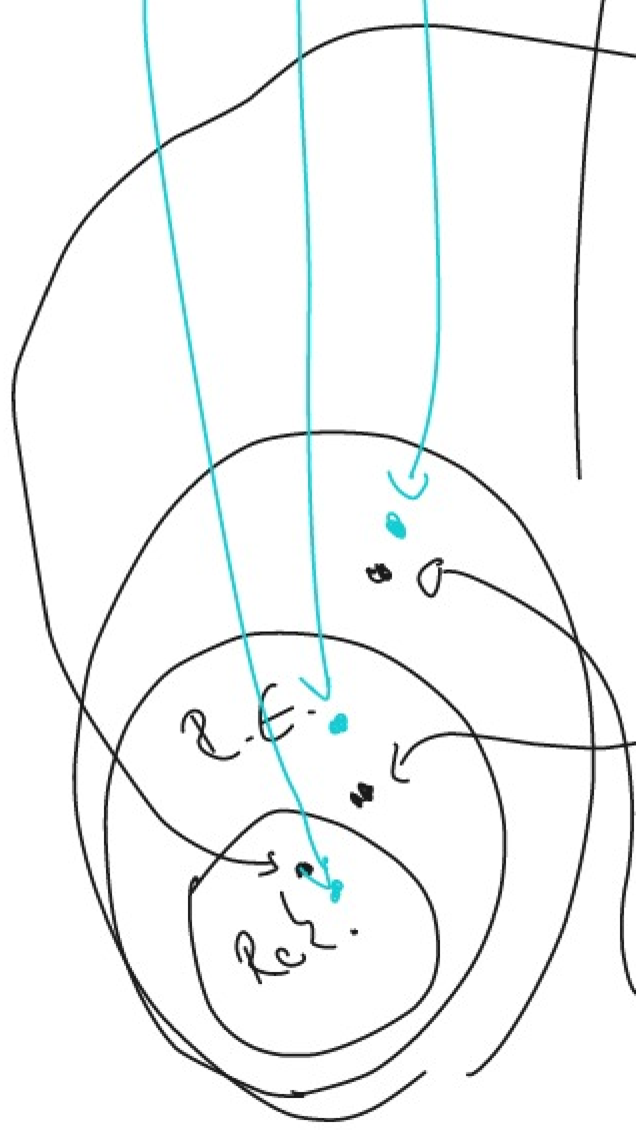
" rozhodnutelné problémy

• všetky prvočísla

R.E. = čiastočne rozhodnutelné problémy

• $HALT = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ je definovaná}\}$

" K



nie sú R.E.

• $\overline{K} = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ nie je definovaná}\}$

$\overline{K} \cup \{10, 1000, 1024, 15\}$

$f_{A'}($

f_A

$\Leftarrow$

$t \cdot f(a) \wedge k < a$

miro

A je R.E. $\iff$ má $\overset{TV}{V}$ num. funkciu $(A = \text{range}(f))$

numerácia

ŠTANDARDNÁ NUMERÁCIA

- programov $P_1, P_2, \dots$
- vyčísl. fcií $\varphi_1, \varphi_2, \dots$
- R.E. množín $W_1, W_2, \dots$

3.8 Dokažte, že každá nekonečná r.e. množina má prostou numerující funkci.

3.6 Uveďte příklad množ

rekurzívní r.e. podmn

A je R.E. $\Rightarrow$ mám TVF f_A ktorá numeruje A $(A = \text{range}(f))$

$f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad f(5) \quad f(6) \quad \dots$

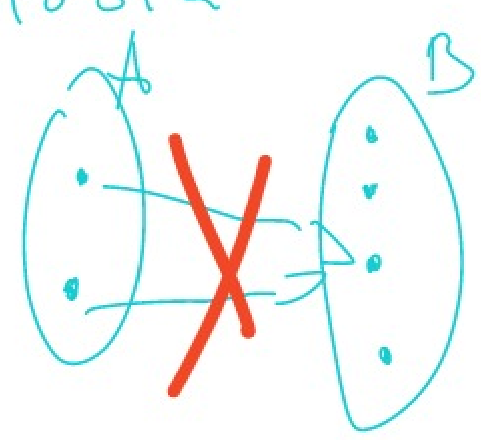
$A = \text{range}(f) = 10, 8, 10, 16, 8, 124, 241, \dots$

$f(0) = f(2)$

$f(1) = f(4)$

prostá num. fcia

Prostá



$f'(x)$ = x-té unikátne číslo z numerácie A

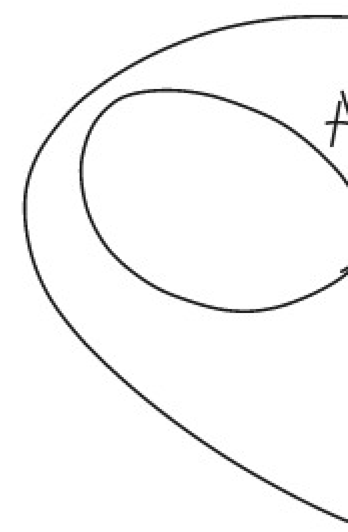
```
input x:
  i = 0; list = {}
  while |list| ≤ x
  [
     n = π1(i)
     k = π2(i)
     if Sc(g, n, k) = 1 then
     {   list += n
     i = i+1
  ]
  return π1(i-1)
```

$A = \text{domain}(g)$

$\varphi_g = g$

Bez zoznamov: množín

```
input x:
  n = 0; a = 0
  while n < x:
  [   a = a+1
      k = 0
      while f(k) ≠ f(a) ∧ k < a
      [   k = k+1
      if k = a
      [   n = n+1
  ]
return f(a)
```



~~$C = K/2$~~

~~$A = K$~~

$C = (\overline{K}) \dots$

$A = \{x \in C \mid x \dots$

$= \{2x+1 \mid \dots$

$B = \{2x \mid \dots$