5.6 Pomocí Riceovy věty dokažte, že následující množiny nejsou rekurzívně spočetné.

(a) $\overline{A_2} = \{i \mid \varphi_i \neq f\}$, kde f je pevná totálně vyčíslitelná funkce

(b) $A_3 = \{i \mid \varphi_i = g\}$, kde g je pevná vyčíslitelná funkce

(c) $\overline{A_3} = \{i \mid \varphi_i \neq g\}$, kde g je pevná vyčíslitelná funkce

(d) $A_4 = \{i \mid a \in \mathrm{dom}(\varphi_i)\}$, kde $a \in \mathbb{N}$ je pevné

(e) $A_5 = \{i \mid \mathrm{dom}(\varphi_i) = \emptyset\}$

(f) $A_6 = \{i \mid \mathrm{dom}(\varphi_i)$ je konečná množina $\}$

(g) $\overline{A_7} = \{i \mid a \notin \mathrm{range}(\varphi_i)\}$, kde $a \in \mathbb{N}$ je pevné

(h) $A_8 = \{i \mid \mathrm{range}(\varphi_i)$ je konečná množina$\}$

(i) $\overline{A_9} = \{i \mid \mathrm{dom}(\varphi_i) \neq \mathbb{N}\}$

(j) $A_{10} = \{i \mid \varphi_i$ je prostá$\}$

(k) $\overline{A_{11}} = \{i \mid \varphi_i$ není bijekce$\}$

$\Sigma \leq C_1$

(e) $A_\Gamma = \{ i \mid dom(\varphi_i) = \emptyset \}$

2. RV

- A_Γ rešp. fcie . . . -
- Θ, Θ' ?

$\Theta = \varepsilon$ (prázdna fcia)

$\Theta' = c_1$ ($f(x) = 1$)

- $\Theta \leq \Theta'$? [$\forall x\ \Theta(x) \neq \perp \Rightarrow \Theta(x) = \Theta'(x)$]
- $\{ i \mid \varphi_i = \varepsilon \} \subseteq A_\Gamma \rightarrow$ ε má $dom(\varepsilon) = \emptyset$, teda všetky indexy ε patria do A_Γ
- $\{ i \mid \varphi_i = c_1 \} \subseteq \overline{A_\Gamma} \rightarrow$ c_1 má $dom(c_1) = \mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \neq \emptyset$ teda c_1 nepatrí do A_Γ.

$\varepsilon \leq c_1$

1. RV:

ε - index prázdnej funkcie

c_1 - index konšt. funkcie $f(x) = 1$ (program vždy cyklí)

- $A_\Gamma \neq \emptyset$
- $A_\Gamma \neq \mathbb{N}$ $\quad \varepsilon \in A_\Gamma$, $c_1 \in \overline{A_\Gamma} \longrightarrow$ doplnok
- A_Γ rešpektuje funkcie

Ak $i \in A_\Gamma$ a $\varphi_i = \varphi_j$, tak potom $\underbrace{j \in A_\Gamma}$.

Ak $i \in A_\Gamma$, tak $dom(\varphi_i) = \emptyset$.

Ak $\varphi_i = \varphi_j$ a $dom(\varphi_i) = \emptyset$, tak $dom(\varphi_j) = \emptyset$.

Ak $dom(\varphi_j) = \emptyset$, tak $\underbrace{j \in A_\Gamma}$.

Podľa 1RV množina A_Γ nie je rek.

(b) $A_g = \{ i \mid \varphi_i = g \}$ (g je pevne daná vyč. fcia)

1.RV:

- $A_g \neq \emptyset$
- $A_g \neq \mathbb{N}$
- A_g rešp. fciu

Nech j $\varphi_j = g$, tak $j \in A_g$

Nech j $\varphi_j \neq g$ tak $j \notin A_g$

Ak $i \in A_g$ a $\varphi_i = \varphi_j$

$\varphi_i = g$, $\varphi_i = \varphi_j$, $\varphi_j = g$, $j \in A_g$

2.RV:

θ a θ' t.ž. "$\theta \in A_g$" a "$\theta' \in \overline{A_g}$"

$\theta = g$ $\longrightarrow$ •) g nie je totálna ($\exists a$ t.ž. $g(a) = \perp$)

$$\theta'(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ g(x) & \text{inak} \end{cases} \quad \rightarrow \theta \leq \theta'$$

$\theta = g$

$\rightarrow$ "$\theta' \notin A_g$" lebo $\theta' \neq g$

θ' je vyčísliteľná lebo?

•) g je totálna $\Rightarrow$ 2RV nejde použiť

3RV: [g je totálna] (Ak by g bolo konečné tak g je konečným zúžením g (samo seba))

$\theta = g$

Kam patria konečné zúženia g?

Všetky kon. zúženia sú rôzne od g, a teda nepatria do A_g.

$K = \{ i \mid \varphi_i(i) \text{ je definované} \}$

$i \in K$ a $\varphi_j = \varphi_i \Rightarrow \varphi_j(i)$ je def.

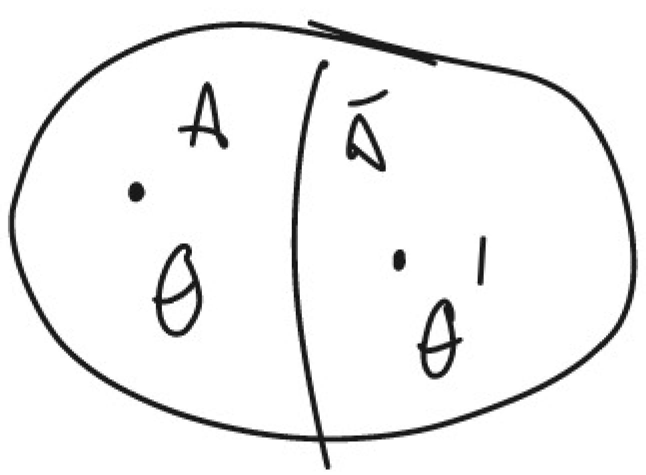
$\varphi_j(j)$???

Věta (1. Riceova věta)

Neprázdná vlastní podmnožina $\mathbb{N}$ (tedy A splňující $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{N}$), která respektuje funkce, není rekurzivní.

/ Existuje $q_i = \theta$ $i \in A$

/ — " — $i \in \bar{A}$



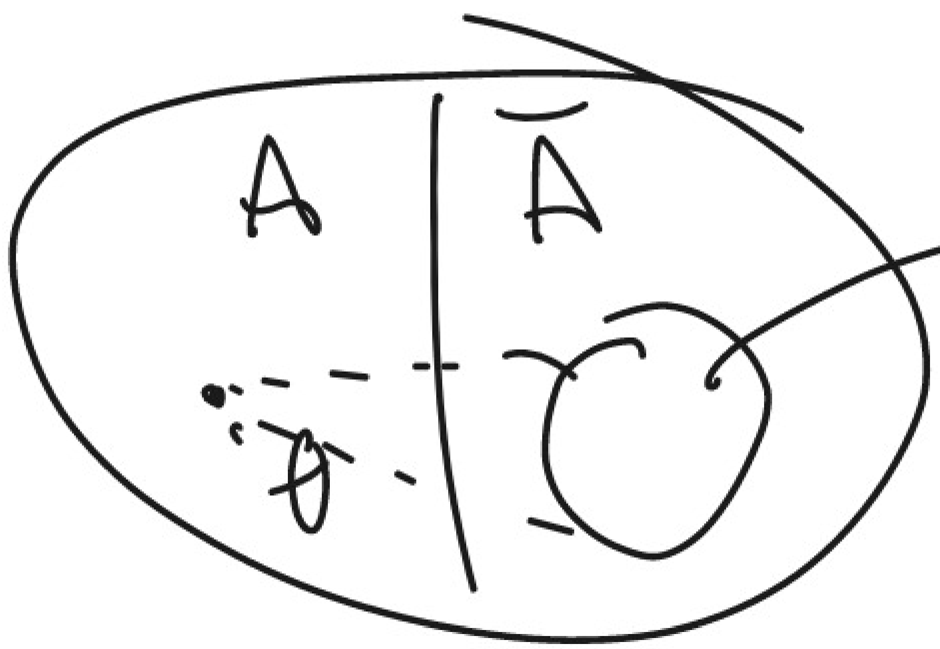
$$\theta = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ je sudé} \\ \perp & \text{inak} \end{cases}$$

$$\theta(x) = y \Rightarrow \theta'(x) = y$$

ale ak $\theta(x) = \perp$, $\theta'(x)$ môže vrátiť hocičo (alebo cykliť)

$$\theta' = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ je sudé} \\ 3x & x \bmod 3 = 0 \land x \text{ je liché} \\ \perp & \text{inak} \end{cases}$$

$$\theta \leq \theta'$$



konečné zúžení θ

$$\mathrm{dom}(f) = \{a_1 \dots a_n\}$$

→ pevne daná fcia

f

- Rozpoznáva I_f fcie? ✓ $i \in I$ a $\varphi_j = \varphi_i$ (a ~~$j \notin I$~~)?

$f \leq \varphi_i$ $\quad \varphi_i = \varphi_j \quad$ ~~$f \not\leq \varphi_j$~~

tak $f \leq \varphi_j$

- Je I_f rekurzívna? 1RV; $I_f \neq \emptyset$ ✓ $I_f \neq \mathbb{N}$ ✓

"$\varepsilon \in I_f$"

$f = \varepsilon \to I_\varepsilon = \mathbb{N}$ ↓ je Rek

$f \neq \varepsilon \to$ "$\varepsilon \notin I_f$"

- Je I_f R.E.? 2RV θ; θ'; $\theta \leq \theta'$

a "$\theta \in I_f$" a "$\theta' \in I_f$" ✗

$f \leq \theta \leq \theta'$ teda $f \leq \theta' \Rightarrow$ "$\theta' \in I_f$"

3RV θ; "$\theta \in I_f$"; $\exists$ konečné zúženia patriace I_f

f je konečná fcia; teda f je kon. zúženie samej seba ✗

Je R.E.

konečný rozsah konštánt

input i:

if $f(a_1) \neq \varphi_i(a_1)$

... —

if $f(a_n) \neq \varphi_i(a_n)$

... —

for a in $dom(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$:

if $f(a) \neq \varphi_i(a)$: loop

- Je $\overline{I_f}$ R.E.?

[Ak A je R.E. a $\bar{A}$ je R.E. $\Rightarrow$ A a $\bar{A}$ sú Rek.]

$\overline{I_f}$ nie je R.E. | ak by bol R.E., tak I_f aj $\overline{I_f}$ sú Rek.

ale I_f nie je Rek.

φ_i je počítaná programem P_i

$P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots$

$\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \ldots$

$W_0 \quad W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad \ldots$

$W_i = \mathrm{dom}(\varphi_i)$

5.5 Uvažujme následující množiny:

~~(a) $\{i \mid W_i$ je konečná$\}$~~

~~(b) $\{i \mid W_i$ je rekurzívní$\}$~~

(c) $\{i \mid W_i$ je rekurzívní, ale ani W_i ani $\overline{W}_i$ není konečná$\} = A$

U každé z nich zjistěte, zda množina respektuje funkce, zda je rekurzívní, r.e. nebo není r.e. a zdůvodněte.

• Rekurz. fcia? ✓ $i \in A$ a $\varphi_i = \varphi_j$ | také | $j \in A$?

$\downarrow$

• $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbb{N}$ W_i je R. a $|W_i| = \infty$ a $|\overline{W_i}| = \infty$

$W_i = dom(\varphi_i) = dom(\varphi_j) = W_j$

$W_i = W_j \Rightarrow j \in A$ □

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \text{ je sudé} \\ \bot & \text{inak} \end{cases}$$

$dom(f_1) = \{x \mid x \text{ sudé}\}$

„$f_1 \in A$"

„$c_1 \notin A$" $dom(c_1) = \mathbb{N}$

• Podľa 1RV A nie je R. $\overline{\mathbb{N}} = \emptyset$ a $\emptyset$ je konečné

• Je R.E.? 2RV: θ, θ', $\theta \leq \theta'$ a „$\theta \in A$" a „$\theta' \in \overline{A}$"

$(\theta' = id)$

$\theta = f_1$ $\theta'(x) = x$ „$\theta' \notin A$" $dom(\theta') = \mathbb{N}$

„$\theta \in A$" $\theta \leq \theta' \to$ id na všetkých $W_{\theta'} = \mathbb{N}$ $\overline{W_{\theta'}} = \emptyset$

✓ $\downarrow$ id na sudých ✓ nie je nekonečné

Nie je R.E. „$\theta' \notin A$" ✓

miro