6.1 Problém rozhodnout, zda program P_i zastaví na vstupu j, můžeme nazvat *obecným problémem zastavení* a ztotožnit jej s množinou

$z = \langle i, j \rangle$ ~~$x \in OK \wedge \varphi_x$ tak $y \in OK$~~

$$OK = \{\langle i, j \rangle \mid \varphi_i(j) \text{ je definováno}\}.$$

Připomeňme, že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je párující funkce. Pomocí redukce dokažte, že tento problém není rozhodnutelný, ale je částečně rozhodnutelný.

$A \subseteq \mathbb{N}$, $B \subseteq \mathbb{N}$

$A \leq_m B$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad \forall_x \; x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ $\quad \langle x, y \rangle = z$

$x = \pi_1(z)$ $\quad y = \pi_2(z)$

$\boxed{\text{B je aspoň také težké ako A.}}$

redukčná fcia je tot. vyč.

$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$

$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin B$

$K = \{ i \mid \varphi_i(i) \text{ je def.} \}$

$OK = \{ \langle i, j \rangle \mid \varphi_i(j) \text{ je def.} \}$

a) $K \leq_m OK$ $\quad$ Chceme: Redukčná fcia f.

$\Downarrow$

OK nie je rozhodnutelný

$x \in K \Rightarrow f(x) \in OK$

$x \notin K \Rightarrow f(x) \notin OK$

f: vstup: i - program / funkcia

$f(i) = \langle i, i \rangle$ (je tot. vyč.)

výstup: $\langle i, j \rangle$ - program + vstup

$x \in K \Rightarrow \varphi_x(x)$ zastaví $\Rightarrow \langle x, x \rangle \in OK \Rightarrow f(x) \in OK$

$\langle x, x \rangle = f(x)$

$x \notin K \Rightarrow \varphi_x(x)$ nie je def. $\Rightarrow \langle x, x \rangle \notin OK \Rightarrow f(x) \notin OK$

$\langle x, x \rangle = f(x)$

6.3 Je dán jazyk

(a) Dokažt

(b) Je jazyk

(c) Je komp

a) HALT = {

↳ nie

HALT

miro

b) $O\Sigma$ je R.E. $O\Sigma \leq_m K$

red. fcia f: vstup $\langle i,j \rangle$

výstup: i'

$\mathrm{solve}_K(x)$

$\boxed{\mathrm{reduce}_{O\Sigma \to \Sigma}(x)}$

$\mathrm{solve}_{O\Sigma}(x) = \mathrm{solve}_K(\mathrm{reduce}_{O\Sigma \to \Sigma}(x))$

$\langle i,j \rangle \in O\Sigma \iff f(\langle i,j \rangle) \in \Sigma$

zafixované konštanty

$f(\langle i,j \rangle)$:

$i' = $ " $\Phi(i,j)$

return Λ;

"

$i' = $ " $x_1 = j$

simuluj i

return i "

spočítaj kód tohoto programu a priraď ho do i' (je tot. vyč.)

$\varphi_{i'} = \Lambda$ (ak $\varphi_i(j)$ je def.)

alebo

$\varphi_{i'} = \Sigma$ (ak $\varphi_i(j) = \perp$)

$\}$

q rázdn

$i' = f(\langle i,j \rangle)$; $\varphi_{i'}(x) = \varphi_i(j)$ (pre všetky x)

$\langle i,j \rangle \in O\Sigma \Rightarrow \varphi_i(j)$ zastaví $\Rightarrow \varphi_{i'}(x)$ zastaví pre všetky x

$\Rightarrow \varphi_{i'}(i')$ zastaví $\Rightarrow i' \in K \Rightarrow f(\langle i,j \rangle) \in K$

$\langle i,j \rangle \notin O\Sigma \Rightarrow \varphi_i(j) = \perp \Rightarrow \forall x\ \varphi_{i'}(x) = \perp$

$\Rightarrow \varphi_{i'}(i') = \perp \Rightarrow i' \notin K \Rightarrow f(\langle i,j \rangle) \notin K$

miro

6.3 Je dán jazyk $A = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid$ výpočet TM $\mathcal{M}$ na slově ε je konečný$\}$.

(a) Dokažte, že A není rekurzivní.
(b) Je jazyk A rekurzivně spočetný?
(c) Je komplement jazyka A rekurzivně spočetný?

6.2 Rozhodněte,

(a) $A \leq_m$ ...
(b) A je rek...
(c) A je rek...
(d) $A \leq_m$ ...
(e) A je ko...
(f) A je rek...
(g) A je rek...

a) HALT = { ⟨M, w⟩ | M je TM ktorý zastaví na slove w }
↳ nie je R

HALT $\leq_m$ A

t. fcia f vstup ⟨M, w⟩

výstup: M' tz. pri svojom výpočte M'

1. zmaže svoj vstup

2. zapíše na pásku w

3. Simuluje stroj M

• M' zastaví / cyklí nezávisle na vstupnom slove

• ⟨M, w⟩ ∈ HALT ⇒ M zastaví nad w ⇒ M' vždy zastaví

⇒ M' zastaví nad ε ⇒ M' ∈ A // f(⟨M, w⟩) ∈ A

• ⟨M, w⟩ ∉ HALT ⇒ M cyklí nad w ⇒ M' vždy cyklí

⇒ M' cyklí nad ε ⇒ M' ∉ A

...) je def. }

...$\varphi_i(j)$ je def. }

program / funkcia
(je tot. vyč.)

...) - program + vstup

a) A

c) A

miro

b) A je R.E. $\quad ACC = \{ \langle M, w \rangle \mid M$ je TM který akceptuje $w \}$ (je R.E.)

$A \leq_m ACC \quad f:$ vstup $\langle M \rangle$ $\quad f(\langle M \rangle) = \langle M, \varepsilon \rangle$

výstup $\langle M, w \rangle$ $\quad$ (je tot. vyč.)

- $\langle M \rangle \in A \Rightarrow M$ zastaví nad $\varepsilon \Rightarrow \langle M, \varepsilon \rangle \in ACC \Rightarrow f(\langle M \rangle) \in ACC$
- $\langle M \rangle \notin A \Rightarrow M$ cyklí nad $\varepsilon \Rightarrow \langle M, \varepsilon \rangle \notin ACC \Rightarrow f(\langle M \rangle) \notin ACC$

c)

miro

6.2 Rozhodněte, zda následující implikace pro libovolné $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Své rozhodnutí zdůvodněte.

(a) $A \leq_m B \implies \overline{A} \leq_m \overline{B}$

(b) A je rekurzivně spočetná a $\overline{A} \leq_m A \implies A$ je rekurzivní

(c) A je rekurzivně spočetná a $A \leq_m \overline{A} \implies A$ je rekurzivní

(d) $A \leq_m B$ a A je rekurzivní $\implies B$ je rekurzivní

(e) A je konečná $\implies A \leq_m \{1\}$

(f) A je rekurzivní $\implies A \leq_m \{1\}$

(g) A je rekurzivní $\implies \{1\} \leq_m A$

M'

a) $A \leq_m B \Rightarrow \overline{A} \leq_m \overline{B}$

↳ mám red. fciu f $\quad x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$

$x \notin A \quad f(x) \notin B$

$x \in A \Rightarrow f(x) \in B$

$x \notin A \Rightarrow f(x) \notin B$

$x \in \overline{A} \quad f(x) \in \overline{B}$

b) A je R.E. a $\overline{A} \leq_m A \Rightarrow A$ je R.

- $\overline{A}$ je R.E.
- A aj $\overline{A}$ je R.E. tak A aj $\overline{A}$ je R.

c

c) A je R.E. a $A \leq_m \overline{A} \Rightarrow A$ je rek?

$\Downarrow$

$\overline{A} \leq_m A$ (viď a)) $\to$ teda platí (podľa b))

vždy zastaví

$\in A$

d) $A \leq_m B$ a A je R $\Rightarrow B$ je R ✗ Redukcia

A ktorá je R $= \{x \mid x$ je sudé$\}$

a $A \leq_m B$

B ktorá nie je R $= K = \{i \mid \varphi_i(i) \neq \bot\}$

vždy cyklí

f: vstup x: $\quad \chi_A(x) = 1$

1. otestuje „x je sudé"?

ANO. Vráti kód programu „return 1"

NIE. Vráti kód programu „while true"

tuje nr} (je R.E.)

miro

e) A je konečná $\Rightarrow A \leq_m \{1\}$

R.E.)

NIE. Vráti kód programu „while true"

e) A je konečné $\Rightarrow A \leq_m \{1\}$

- A je R. a $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ / $\chi_A(x) = 1$

$\overset{\|}{\chi_A}$

f) A je rekurzívna $\Rightarrow A \leq_m \{1\}$

- A je R $\Rightarrow \chi_A \Rightarrow f = \chi_A$

g) A je rekurzívna $\Rightarrow \{1\} \leq_m A$ **Neplatí (len pre $\emptyset$ a $\mathbb{N}$)**

$f(x) = \begin{cases} y \in A & x = 1 & A \neq \emptyset \\ y \notin A & x \neq 1 & A \neq \mathbb{N} \end{cases}$

h) A nie je rek $\Rightarrow \{1\} \leq_m A$

miro