6.5 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\times \qquad \times$$

$$\left\{\left[\frac{aa}{a}\right],\left[\frac{ab}{abab}\right],\left[\frac{b}{a}\right],\left[\frac{aba}{b}\right]\right\}$$

$$\frac{aa}{a}\;\Big|\;\frac{aa}{a}\;\cancel{\frac{ab}{abab}}$$

$$\frac{aababa}{aab}$$

$$\frac{b}{a}$$

$$\frac{ab}{abab}\;\Big|\;\frac{ab}{abab}\;\Big|\;\frac{aba}{b}\;\Big|\;\frac{b}{a}\;\Big|\;\frac{b}{a}\;\Big|\;\frac{aa}{a}\;\Big|\;\frac{aa}{a}\;\Big|$$

$$\frac{ababababbaaaaa}{ababababbaaaaa}$$

6.7 Ukažte, že Postův korespondenční problém lze redukovat na iniciální Postův korepondenční problém, tj. $PCP \leq_m inPCP$.

$\mathbb{N} \supseteq PCP = \{ \langle P \rangle \mid P$ je Postov systém ktorý má nejaké riešenie $\}$

↳ vhodne zakódovaný Postov systém

$inPCP = \{ \langle P, k \rangle \mid P$ je Postov systém ktorý má riešenie začínajúce kockou $k \}$

red. fcia

$$PCP \leq_m inPCP$$

$$f(x) = y \qquad x \in PCP \iff y \in inPCP$$

$$\begin{array}{cccccc} & k_1 & k_2 & \cdots & k_n & \\ P = \{ & \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right] & \left[\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right] & \cdots & \left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right] & \} \end{array}$$

nový symbol

$$P' = \{ \left[\frac{\#}{\#}\right] \left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right] \left[\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right] \cdots \left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right] \}$$

$x \in PCP \Rightarrow y \in inPCP$

$x \in PCP \Rightarrow$ existuje riešenie $k_{i_1}\ k_{i_2}\ k_{i_3}\ k_{i_4} \dots$

$\Rightarrow \left[\frac{\#}{\#}\right] k_{i_1}\ k_{i_2}\ k_{i_3} \dots$ je riešenie $P' \Rightarrow f(x) \in inPCP$

$x \notin PCP \Rightarrow f(x) \notin inPCP$

ľubovoľné

$\Rightarrow$ neexistuje riešenie $P \Rightarrow \forall \left[\frac{\#}{\#}\right] k_{i_1}\ k_{i_2}\ k_{i_3} \dots$ nie je riešenie

$\Rightarrow f(x) \notin inPCP$

$\left[\frac{\#}{\#}\right]$ je riešenie

$$P' = \left\{ \left[\frac{\#}{\#\#}\right] \overset{\xi_1}{\left[\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right]} \overset{\xi_2}{\left[\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right]} \dots \overset{\xi_n}{\left[\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right]} \overset{\zeta_1}{\left[\frac{\#\alpha_1}{\beta_1}\right]} \overset{\zeta_2}{\left[\frac{\#\alpha_2}{\beta_2}\right]} \dots \overset{\zeta_n}{\left[\frac{\#\alpha_n}{\beta_n}\right]} \right.$$

$\langle P \rangle \in PCP \Rightarrow$ existuje riešenie $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_m} = \frac{w}{w}$

$\Rightarrow$ pos. $\left[\frac{\#}{\#\#}\right] \zeta_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_m}$ je riešenie inPCP P' $\Rightarrow \langle P', \frac{\#}{\#\#} \rangle \in$ inPCP

$$= \frac{\#\# w}{\#\# w}$$

$\langle P \rangle \notin PCP \Rightarrow$ ľubovoľná postupnosť $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_m}$ nie je riešenie P

$\Rightarrow \left[\frac{\#}{\#\#}\right] \zeta_{i_1}$

musí byť na začiatku

$\left[\frac{\#\#}{\#\#}\right]$

$\left[\frac{\#\#}{\#\#}\right] \xi_i \dots$

$\left[\frac{\#}{\#\#}\right] \zeta_{i_1} \dots \zeta_j \dots$ lebo by som v spodu potreboval presne $1\times\#$ slove

nemôže obsahovať ďalšie ζ

$\left[\frac{\#}{\#\#}\right] \zeta_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3} \dots \xi_{i_m}$

↳ Ak by toto bolo riešenie P' tak $\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}$ by bolo riešenie P

$\Downarrow$

$\langle P', \frac{\#}{\#\#} \rangle \notin$ inPCP ↳ to nemôže

---

$\langle P \rangle$ — „kódovaný" P

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \langle P', \frac{\#}{\#\#} \rangle & \text{Ak } x \text{ je kód nejakého Postovho systému } P \\ \text{nejaká dvojica } \langle P, \xi \rangle & \text{ktorá nemá riešenie} \end{cases}$$

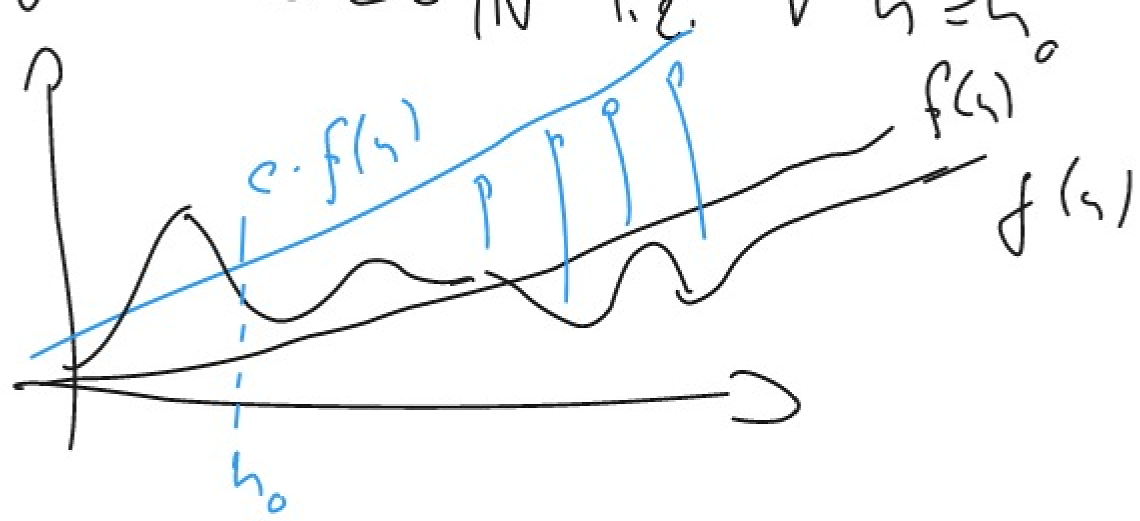
f je vyčísliteľná

X

X

$g \in O(f)$ „g rastie asymptoticky najviac tak rýchlo ako f"

$\exists n_0 \in N\ \exists c \in N$ t.z. $\forall n \geq n_0 \quad g(n) \leq c \cdot f(n)$



(b) $n^2 \in O(n) \to$ Neplatí

Sporom: Predpokladáme n_0 a c t.z. $\forall n \geq n_0\ g(n) \leq c \cdot f(n)$

$n^2 \leq c \cdot n$ ~~Pre $m = c+1$ neplatí:~~ ani . . .

$c < n$ ~~$(c+1)^2 \not\leq (c+1) \cdot c$~~ ~~teda neplatí~~

Nefunguje $\to$ ak $m < n_0$

Pre $m = \max\{n_0, c\} + 1$ neplatí

$m^2 \leq c \cdot m$, teda neplatí ani $\forall n \geq n_0\ n^2 \leq c \cdot n$.

riešenie

(f) $3n^2 + 4n + 17 \in O(n^2 - n + 1) \rightarrow$ Platí

Potřebujeme vhodné c a n_0

$$\forall n \geq n_0: \quad 3n^2 + 4n + 17 \leq c \cdot (n^2 - n + 1)$$

$$c = 4$$

$$3n^2 + 4n + 17 \leq 4n^2 - 4n + 4$$

$n_0 = 10$

$$\forall n \geq 10 \quad 3n^2 + 4n + 17 \leq 4 \cdot (n^2 - n + 1)$$