1. *(25 bodů)* Rozhodněte, zda je následující funkce $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ vyčíslitelná.

$$f(i,j) = \begin{cases} \varphi_i(107) & \text{pokud } \varphi_i \text{ není rozšířením funkce } \varphi_j \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Své rozhodnutí dokažte. *(Pro důkaz, že funkce je vyčíslitelná, stačí napsat while-program, který ji počítá.)*

Řešení: Sporem dokážeme, že f není vyčíslitelná. Předpokládejme, že f je vyčíslitelná.

Nejdříve definujeme funkce $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, aby platilo:

$$\varphi_{g(i)}(x) = \begin{cases} \perp & \text{pokud } x \geq 108 \text{ a } \varphi_i(x-108) = \perp \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\varphi_{h(i)}(x) = \begin{cases} \perp & \text{pokud } x \geq 108 \text{ a } \varphi_i(x-108) = \perp \text{ a } x-108 \neq i \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Funkce g, h jsou totálně vyčíslitelné, $g(i)$ vrací pro dané i kód programu

begin
  if $x_1 \geq 108$ **then** $\Phi(i, x_1 - 108)$;
  $x_1 := 1$;
end

a $h(i)$ vrací pro dané i kód programu:

begin
  if $x_1 \geq 108 \ \wedge \ x_1-108 \neq i$ **then** $\Phi(i, x_1 - 108)$;
  $x_1 := 1$;
end

Pokud $\varphi_i(i) \neq \perp$, pak jsou funkce $\varphi_{g(i)}$ a $\varphi_{h(i)}$ identické. Pokud $\varphi_i(i) = \perp$, pak se tyto funkce liší právě na vstupu $i + 108$, kde $\varphi_{g(i)}(i + 108) = \perp$ a $\varphi_{h(i)}(i+108) = 1$. Tedy $\varphi_{g(i)}$ není rozšířením $\varphi_{h(i)}$, právě když $\varphi_i(i) = \perp$.

Pro každé i platí $\varphi_{g(i)}(107) = 1$. Celkově dostáváme:

$$\begin{aligned} i \in \overline{K} \iff \varphi_i(i) = \perp \quad & \iff \quad \varphi_{g(i)} \text{ není rozšířením } \varphi_{h(i)} \\ & \iff \quad f(g(i), h(i)) = \varphi_{g(i)}(107) = 1 \\ & \iff \quad f(g(i), h(i)) \text{ je definováno} \end{aligned}$$

Jelikož jsou funkce g, h totálně vyčíslitelné a o funkci f předpokládáme, že je vyčíslitelná, je vyčíslitelná i funkce $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovaná vztahem $s(i) = f(g(i), h(i))$. Z výše uvedeného plyne, že $s(i)$ je definovaná právě pro $i \in \overline{K}$. Proto $\overline{K}$ je definičním oborem vyčíslitelné funkce a tudíž r.e. To je spor s faktem, že $\overline{K}$ není r.e.