Diferenciální rovnice

Rovnice se separovatelnými proměnnými

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)\,g(y) \longrightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

Formálně: $\frac{1}{g(y)}\,y' = f(x) \to \int \frac{1}{g(y)}\,y'\,dx = \int f(x)\,dx$

$$\left| \begin{array}{l} y = y(x) \\ dy = y'(x)\,dx \end{array} \right| \quad \int \frac{1}{g(y)}\,dy$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y^2+1}{x+1} \qquad + \; y(0) = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \ln|x+1| + C \qquad (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y)$$

$$y = \operatorname{tg}(\ln|x+1| + C) \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$1 = \operatorname{tg}(C) \to C = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$$

$$y = \operatorname{tg}(\ln|x+1| + \pi/4)$$

Substituce

pro dif. rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

je používáme substituci $u = \frac{y}{x}$ $\quad u(x)$

$$\to y = ux \to y' = u + xu'$$

$$\to xu' = f(u) - u$$

$\to$ separace

- $x y' + y \ln x = y \ln y \quad , \quad y(1) = 1$

$e x + e x \ln x = ex(\underbrace{\ln e}_{=1} + \ln x)$

$x y' = y \ln \frac{y}{x}$

Pozor na dělení funkcí (nesmí být nulová)

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

$u = \frac{y}{x} \qquad y' = u + x u'$

$$u + x u' = u \ln u$$

$$x \frac{du}{dx} = x u' = u \ln u - u$$

předp. $u(\ln u - 1) \not\equiv 0$

$$\int \frac{1/u}{(\ln u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$\frac{y}{x} = u \not\equiv 0, e$

$\cancel{y \equiv 0}$, $y = e \cdot x$ ✓

$$e^{\ln |\ln(u) - 1|} = e^{\ln |x| + C} \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$\ln(u) - 1 = \pm x + C \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$u = e^{\pm x + C + 1} = e^{\pm x + D} = e^{\pm x} \cdot e^{D}$$

$$\frac{y}{x} = e^{\pm x} \cdot C \, , C > 0$$

$$\begin{cases} y = x \, e^{\pm x} \cdot C \, , & C > 0 \\ y = e \cdot x \end{cases}$$

Lineární dif. rovnice

$$y' = a(x) y + b(x)$$

$$y' - a(x) y = b(x) \qquad / \cdot e^{-\int a(x) dx} =: I(x)$$

$$\underbrace{y' e^{I(x)} - a(x) y e^{I(x)}} = b(x) e^{I(x)}$$

$$(y e^{I(x)})' = b(x) e^{I(x)} \rightarrow y e^{I(x)} = \int b(x) e^{I(x)} dx$$

• $y' = x - \dfrac{2y}{x^2-1}$, $y(2) = 3$

$$I = -\int a(x)\,dx = -\int \frac{-2}{x^2-1}\,dx = -\int \frac{-2}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$= -\int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$y' + \frac{2}{x^2-1}\cdot y = x \quad \Big/\; e^{-\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$\underbrace{y'\,\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\,y}_{\left(y\cdot\frac{x+1}{x-1}\right)'} = \frac{x-1}{x+1}\,x$$

$$y\cdot\frac{x-1}{x+1} = \int \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{l} x^2 - x : x+1 = x - 2 + \dots \\ -(x^2+x) \\ \hline \quad -2x \\ -(-2x-2) \\ \hline \quad 2 \end{array}$$

$$= \int x - 2 + \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + C$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x+1| + c\right)$$

$x = 2$
$y = 3$

$$3 = \frac{1}{3}\left(2 - 4 + \ln 3 + c\right)$$

$$9 = \ln 3 - 2 + c \qquad \underline{\underline{c = 11 - \ln 3}}$$

řeš. splňující poč. podm.

$$y = \frac{x-1}{x+1}\left(\dots + 11 - \ln 3\right)$$

Bernoulliova rovnice

$r > 0$

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^r \qquad (y \equiv 0 \text{ je řešením})$$

$$y^{-r} y' = a(x)\, y^{1-r} + b(x) \qquad (\text{předp. } y \neq 0)$$

$$u = y^{1-r} \to u' = \underbrace{y^{-r}}_{(1-r)} \cdot y'$$

$$\frac{1}{1-r} u' = a(x)\, u + b(x)$$

- $y' = \frac{y}{x} + y^2 \sin x$

$$y^{-2} y' = \frac{1}{x} y^{-1} + \sin x \qquad u = y^{-1}$$

$$-u' = \frac{1}{x} u + \sin x \qquad u' = -y^{-2} \cdot y'$$

$$I(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) \to e^{I(x)} = x$$

$$-\left(u' + \frac{1}{x} u\right) = \sin x \quad / \cdot x$$

$$-(u' x + u) = (-u x)' = x \sin x$$

$$-u x = \int x \sin x\, dx =$$

$$\overset{P.P.}{=} -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$$+y^{-1} = +u = +\cos x - \frac{1}{x}(\sin x + C)$$

$$y = \frac{1}{\cos x - \frac{1}{x} \sin x + c}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Diferenciální počet funkcí více proměnných

- určete definiční obor funkce, načrtněte

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} \qquad g(x,y) = \sqrt{\sin(x)\sin(y)}$$

DÚ

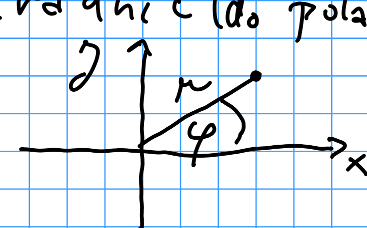
- Pomocí vrstevnic a řezů nakreslete graf funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$

Limity

Nefunguje l'Hospitalovo pravidlo.

Možné využít transformace souřadnic (do polárních)

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$



Vyjádřením y jako funkce x, směřujeme k limitnímu bodu jen po jedné cestě.
(obdoba limity zprava/zleva)

- $$\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

- $$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$