Diferenciální počet funkcí více proměnných

• určete definiční obor funkce, nakreslete

$f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ $\qquad g(x,y) = \ln\left(\sqrt{\sin(x)\sin(y)}\right)$

$x^2 - y^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq y^2 \;/\sqrt{\ }$ $\qquad \sin x \cdot \sin y \underset{\neq}{\geq} 0$

$(x-y)(x+y) \geq 0 \qquad |x| \geq |y| \rightarrow \underline{|x| = |y|}$

$\Leftrightarrow\; x-y \geq 0$ & $x+y \geq 0$

nebo

$x-y \leq 0$ & $x+y \leq 0$

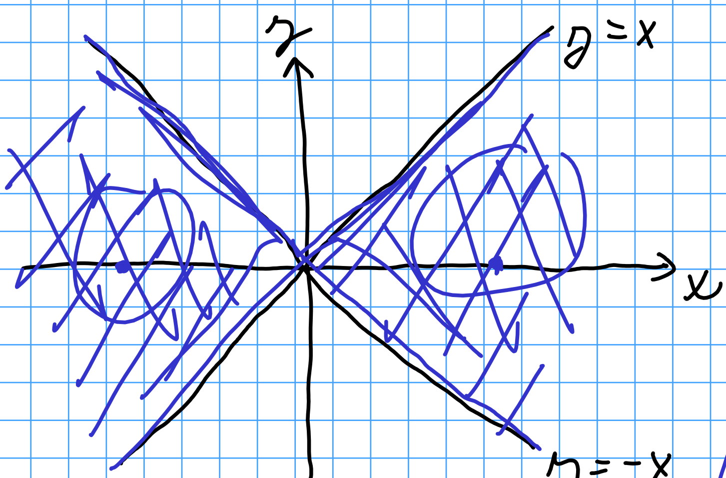
$y = |x|$

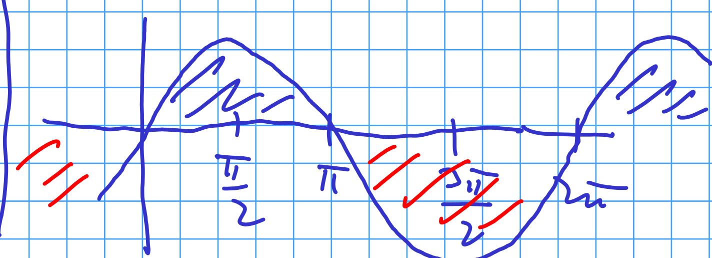
$y = -|x|$

① $\left(\sin x > 0 \;\&\; \sin y > 0\right)$

nebo

② $\sin x < 0$ & $\sin y < 0$





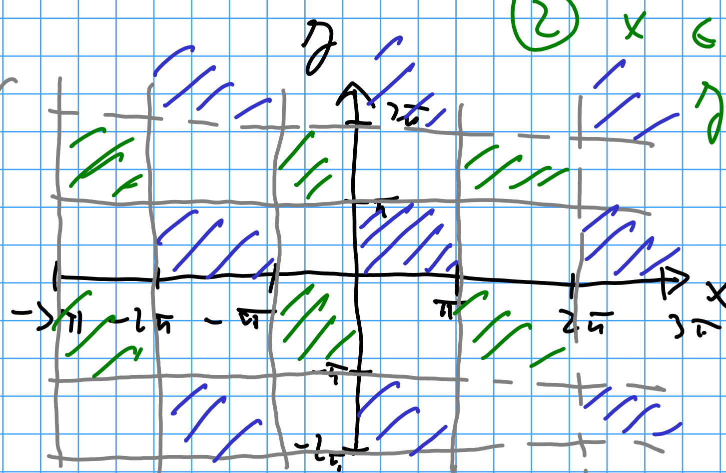
① $x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi)$

$y \in$

② $x \in (-\pi+2k\pi, 2k\pi)$

$y \in$

(šedá nepatří do $D(f)$)



$\sin x = 0$

$x \in 2k\pi, \pi+2k\pi$

$\sin x \cdot \sin y = 0$

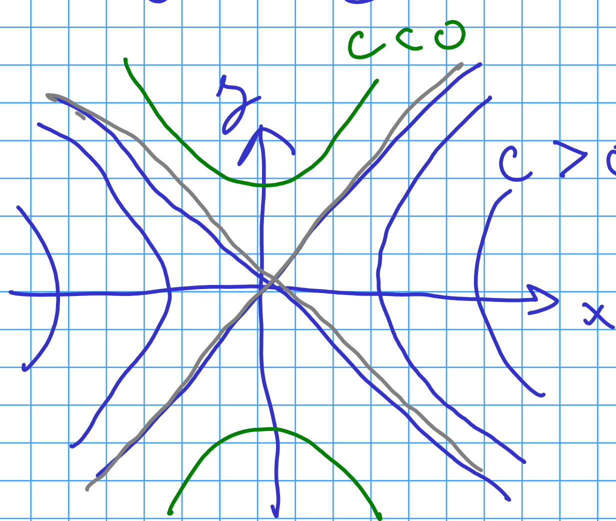
• Pomocí vrstevnic a řezů nakreslete graf funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$

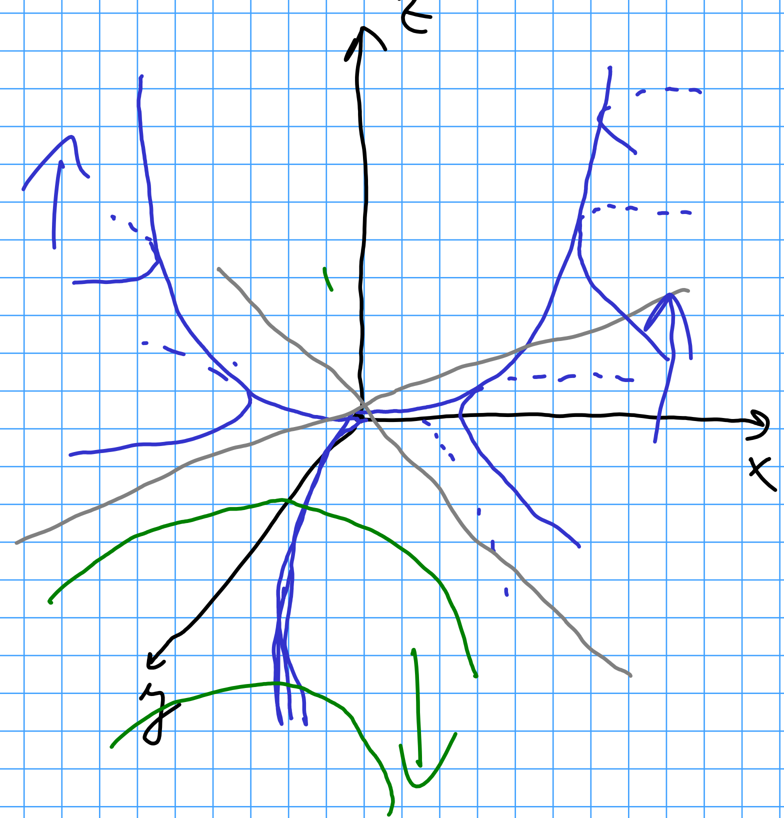
$y = 0 \qquad f(x,0) = x^2$

$x = 0 \qquad f(0,y) = -y^2$

$\pm c^2 = f(x,y) = x^2 - y^2$

$\pm \frac{x^2}{c} \mp \frac{y^2}{c} = 1$





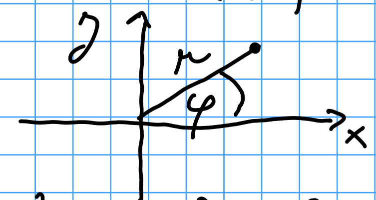
Limity

(Nefunguje l'Hospitalovo pravidlo)

• $$\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Možné využít transformace souřadnic (do polárních)

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$



• $$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \Bigg| = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi}$$

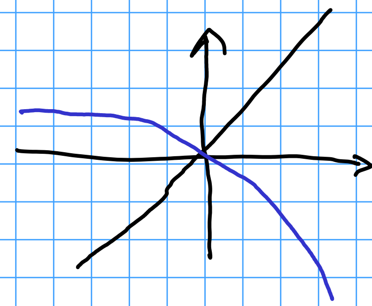
$$= \lim \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos^4\varphi}_{\geq 0} + \underbrace{\sin^4\varphi}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{M} \Bigg|$$

nikdy zároveň $= 0$

$$\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{M} = 0$$

Vyjádřením y jako funkce x, směřujeme k limitnímu bodu jen po jedné cestě. ⇒ vhodné pro důkaz neex. limity (obdoba limity zprava/zleva)

• $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ neexistuje



$y = x: \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

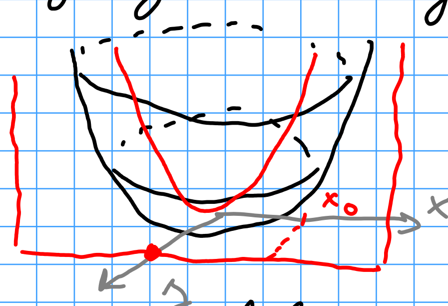
$y = 1-e^x: \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1-2e^x+e^{2x}}{x+1-e^x} \left| \text{typ } \frac{0}{0} \right| \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-2e^x+2e^{2x}}{1-e^x}$

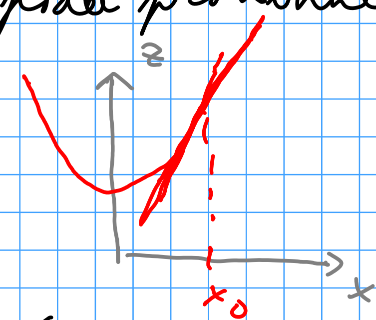
$\left|\frac{0}{0}\right| \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-e^x+4e^{2x}}{-e^x} = -5$

Parciální derivace

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ ... zafixuji y a derivuji podle proměnné x

$f_x(x_0,y_0)$





• Spočtěte f_x, f_{xy} pro $f(x,y) = x\ln(x\cdot y)$.

$f_x(x,y) = \ln(x\cdot y) + x\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y = \ln(x\cdot y)+1$

$f_{xy}(x,y) = \dfrac{1}{xy}\cdot x = \underline{\dfrac{1}{y}}$

$f_y(x,y) = x\,\dfrac{1}{xy}\cdot x = \dfrac{x}{y}$ $f_{yx}(x,y) = \underline{\dfrac{1}{y}}$

Rovnice tečné roviny

$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$z_0 = f(x_0,y_0)$

- Určete rovnici tečné roviny grafu funkce $f(x,y) = \underline{x^2 + xy + 2y^2}$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$.

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0)$$

$$z_0 = f(1,1) = 4$$

$$f_x = 2x + y + 0$$

$$f_y = 0 + x + 4y$$

$$f_x(1,1) = 3$$

$$f_y(1,1) = 5$$

$$\underline{z = 4 + 3(x-1) + 5(y-1)}$$

- Pomocí diferenciálu přibližně vypočítejte $\operatorname{arctg} \frac{1{,}02}{0{,}95}$.

V podstatě to samé jak tečná rovina, aproximujeme podle blízkého bodu, tj $[x_0, y_0] = [1, 1]$ pro $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

$$f(1,1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \pi/4$$

$$f_x(1,1) = \left(\frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1} \cdot \frac{1}{y} \right)(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$f_y(1,1) = \left(\frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1} \cdot x \cdot \frac{-1}{y^2} \right)(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1{,}02,\, 0{,}95) \approx \underbrace{f(1,1)}_{= \pi/4} + \underbrace{f_x(1,1)}_{= 1/2}\,(1{,}02-1) + \underbrace{f_y(1,1)}_{= -1/2}\,(0{,}95-1)$$

Lokální extrémy

U spojitých funkcí zase hledáme nejprve stacionární body. $(f_x = 0 \quad f_y = 0)$

O lok. extrému rozhodneme podle determinantů hlavních minorů Hessovi matice H.

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & \cdots \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & \cdots \end{pmatrix}$$

Hlavní minory

$+, +(, +)$ minimum

$-, +(, -)$ maximum

$+/-, 0$ nevíme

$?, -$ sedlový bod

• Určete lok. extrémy $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
$= x^4 + y^4 - (x+y)^2$

$$f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0$$

$(f_x - f_y)$ $\quad 4x^3 - 4y^3 = 0 \rightarrow x^3 = y^3 \rightarrow \underline{x = y}$

(f_x dosadím $x = y$) $\quad 4x^3 - 2x - 2x = 0$

$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x(x+1)(x-1) = 0$

3 stac. body: $\quad x = 0 \quad y = 0$ $\quad$ (protože $x = y$)

$x = 1 \quad y = 1$

$x = -1 \quad y = -1$

$$f_x = 4x^3 - 2x - 2y \qquad f_y = 4y^3 - 2x - 2y$$

$f_{xx} = (f_x)_x = 12x^2 - 2 \qquad f_{yy} = 12y^2 - 2$

$f_{xy} = (f_x)_y = -2 \qquad H = \begin{pmatrix} 12x^2-2 & -2 \\ -2 & 12y^2-2 \end{pmatrix}$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} \overset{<0}{\boxed{-2}} & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

→ nevíme

$H(1,1) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{\boxed{12-2}} & -2 \\ -2 & 12-2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 100-4 = 96 > 0$

$+ \qquad + \quad$ ⇒ lok. min v bodě [1,1]

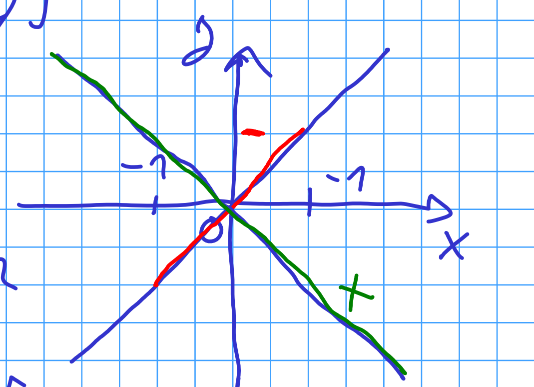
$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ ⇒ lok. min. v bodě [-1,-1]

[0,0]: $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$

$f(0,0) = 0$

$y = x$: $f(x,x) = 2x^4 - 4x^2 \leq 0$

$y = -x$: $f(x,-x) = x^4 + (-x)^4 - (x-x)^2 = 2x^4 \geq 0$ ⇒ [0,0] je sedlový bod



• Určete lok. extrémy funkce

$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$.

$x^2+y^2 \geqq 0$

$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{[0,0]\}$

$f'_x = (xy)'_x \cdot \ln(x^2+y^2) + xy \cdot (\ln(x^2+y^2))'_x$

$= y \cdot \ln(x^2+y^2) + xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)'_x$

$= y\ln(x^2+y^2) + xy\,\frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = 0 \quad /\cdot x$

$f'_y = x\ln(x^2+y^2) + xy\,\frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = 0 \quad /\cdot y \quad \ominus$

$\frac{2x^3y}{x^2+y^2} - \frac{2xy^3}{x^2+y^2} = 0 \rightarrow 2x^3y - 2xy^3 = 0$

$\rightarrow xy(x^2-y^2) = 0 \iff \underline{x=0}$ (1) nebo $\underline{y=0}$ (2)

nebo $x^2 = y^2$

$\Updownarrow$

(3) $\underline{y = x}$ nebo $\underline{y=-x}$ (4)

(1) $x=0$: $f_x(0,y) = y\ln y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$\Rightarrow$ stac. body: $[0,1], [0,-1]$ (bod $[0,0] \notin D(f)$)

(dosazením do f_y ověříme, že i $f_y = 0$)

(2) $y=0$: $f_y(x,0) = x\ln x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow$ stac. body $[1,0], [-1,0]$

(3) $y = x$: $f_x(x,x) = x\ln(2x^2) + \dfrac{2x^3}{2x^2}$

$= x\left(\ln(2x^2)+1\right) = 0$

kdyby $x=0$, pak by i $y=0$, ale $\notin D(f)$

$\Rightarrow \ln(2x^2)+1 = 0$

$2x^2 = e^{-1}$

$x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2e}}$ (opět dosazením do $f_y\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2e}}, \frac{\pm1}{\sqrt{2e}}\right)=0$)

$\Rightarrow$ čtyři stac. body $\left[\dfrac{\pm1}{\sqrt{2e}}, \dfrac{\pm1}{\sqrt{2e}}\right]$

(4) $y=-x$: Dá nám stejnou rovnici jako (3)

$\Rightarrow$ stejné st. body

$\Rightarrow$ Pohromady 8 stac. bodů $[0,\pm1]$, $[\pm1,0]$, $\left[\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right]$

Spočítáme Hessovu matici

$$f_{xx} = \left(y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right)_x$$

$$= y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x + \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x^2y\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$f_{xy} = \ldots$ To je příšerný příklad, dál to počítat nebudu

ale v $[0,\pm1]$, $[\pm1,0]$ by neměl být extrém, v ostatních čtyřech by měl být.