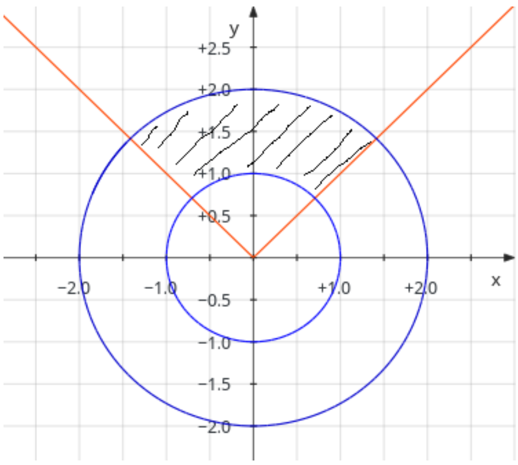
Spojité modely a statistika 2017
Řešené příklady k 6. cvičení

Příklad 5. *Vypočtěte integrál* $\iint_A 2\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde* A: $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $y \ge |x|$.

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic.

Řešení. Nejprve si nakreslíme obrázek množiny A.



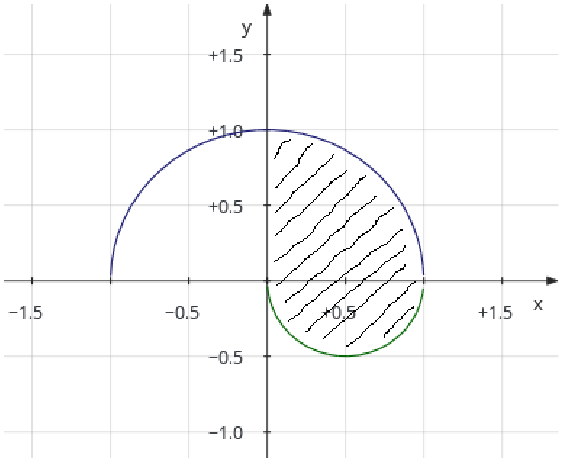
Vidíme tedy, že množinu můžeme zadat v polárních souřadnicích nerovnostmi: $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$, $1 \le r \le 2$. Spočítejme tedy integrál:

$$\begin{aligned}
\iint_A 2\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{G^{-1}(A)} 2\left((r\cdot\cos(\varphi))^2+(r\cdot\sin(\varphi))^2\right)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \iint_{G^{-1}(A)} 2r^3\underbrace{\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)}_{=1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\int_1^2 2r^3\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[2\cdot\frac{r^4}{4}\right]_1^2\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{16}{2}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{15}{2}\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{15}{4}\pi.
\end{aligned}$$

△

Příklad 6. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Nakreslíme si obrázek množiny.



Tuto množinu bude lepší rozdělit na část nad osou x a část pod osou x. Nad osou x máme čtvrtinu kružnice se středem v bodě $[0,0]$ s poloměrem $r=1$, tuto část označme M_1. Pod osou x máme polovinu kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2},0]$ s poloměrem $r=\frac{1}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \iint_{M_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \iint_{M_2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Integrál $\iint_{M_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vypočítáme převodem do polárních souřadnic se středem v počátku, integrál $\iint_{M_2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vypočítáme převodem do polárních souřadnic se středem v bodě $[\frac{1}{2},0]$.

$$\begin{aligned}\iint_{M_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \iint_{G^{-1}(M_1)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} \\ \iint_{M_2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} r\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\varphi = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{8}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Dohromady

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_{M_1} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \iint_{M_2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\pi.$$

Když si uvědomíme, že $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ je vlastně jen obsah množiny vyšrafované na obrázku, tak to přesně odpovídá součtu obsahu ($S = \pi r^2$) čtvrtiny kruhu s poloměrem 1 a poloviny kruhu s poloměrem $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi.$$

Zajímavější je spočítat $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$. Zkuste to sami výše uvedeným způsobem (nezapomeňte při transformaci souřadnic na posunutí). Mělo by to vyjít $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{3}$. $\triangle$

Příklad. *Zkuste sami vypočítat integrál* $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Řešení. Rozdělte si na 2 integrály, jeden spočítá oblast pod čtvrtinou kružnice (použijete posunuté polární souřadnice), druhý pod přímkou $y = x$ (pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$), a odečtěte druhý integrál od toho prvního. Pro spočítání integrálu $\int \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi$ využijte rovnosti $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$ a substituci $\psi = 2\varphi$. Výsledek by měl vyjít $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$.

Na obrázku níže je nalevo oblast, kterou chceme spočítat, a napravo je jak ji spočítáme (odečtením integrálů těch dvou oblastí).