MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 1. cvičenie, 7.10.2020

Limita a spojitosť funkcie

Na začiatok uvedieme a pripomenieme niektoré pravidlá pre počítanie s limitami, aby sme sa na ne mohli odvolávať. Všetky môžu byť dohľadané v [1], [2] alebo [3].

Veta 1. *Nech* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$*, kde* $L, M \in \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. Potom platí:*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M, \tag{2}$$

$$\textit{Ak } M \neq 0, \textit{ tak tiež } \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}. \tag{3}$$

Veta 2. *Platia nasledujúce rovnosti:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0} \begin{pmatrix} \textit{funkcia ohraničená} \\ \textit{na nejakom okolí } x_0 \end{pmatrix} \cdot (\textit{funkcia} \to 0) = 0 \tag{9}$$

Definícia 3. Funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď je definovaná funkčná hodnota $f(x_0)$, limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je vlastná a zároveň platí rovnosť $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Počítanie limity v bode, v ktorom je daná funkcia spojitá, je jednoduché - do jej predpisu stačí tento bod dosadiť.

Veta 4. *Ak sú funkcie* f *a* g *spojité v bode* x_0*, potom sú v tomto bode spojité aj funkcie* $f \pm g$*,* $f \cdot g$ *a za predpokladu* $g(x_0) \neq 0$ *je spojitá aj funkcia* $\frac{f}{g}$*.*

Veta 5. *Nech* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. Ak* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ *a funkcia* f *je spojitá v bode* M*, potom platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(M). \tag{10}$$

Ak je g *spojitá v* x_0 *a* f *je spojitá v* $g(x_0)$*, potom je aj funkcia* $f \circ g$ *spojitá v bode* x_0*.*

Dôsledok 6. *Polynómy, exponenciálne a logaritmické funkcie, goniometrické a cyklometrické funkcie, všeobecná mocnina a všetky funkcie, ktoré z vyššie uvedených vzniknú aplikáciou konečného počtu operácií sčitovania, odčitovania, násobenia, delenia a skladania sú na svojich definičných oboroch spojité funkcie.*

Príklad 7. Z definície limity dokážte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Potrebujeme ukázať, že pre každé $A > 0$ existuje $\delta > 0$ s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ platí $\frac{1}{x^2} > A$. Nech teda máme dané ľubovoľné $A > 0$. Upravujme nerovnicu $\frac{1}{x^2} > A$:

$$\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow 1 > Ax^2 \Leftrightarrow \frac{1}{A} > x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} > |x|\,.$$

Zvoľme preto $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Ak $x \in (-\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}}) \setminus \{0\}$, potom zrejme $|x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$ a podľa predošlých výpočtov z toho vyplýva platnosť nerovnosti $\frac{1}{x^2} > A$. Presne to sme chceli ukázať. ✈

Príklad 8. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}.$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$, čo znamená, že priame dosadenie nám v jej výpočte nepomôže. Pripomeňme vzorec $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Ak zvolíme $a=\sqrt[3]{1+x^2}$ a $b=1$, potom môžeme vhodným rozšírením daného zlomku upraviť čitateľa na tvar $a^3-b^3=x^2$, ktorý sa následne vykráti s tým istým výrazom v menovateli.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2((1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2((1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} \\
&= \frac{1}{(1+0^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+0^2}+1} = \frac{1}{3} && \text{(definícia 3 a dôsledok 6)}
\end{aligned}$$

✈

Príklad 9. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)+\tan^2(x)}{x\sin(x)}.$$

Keďže je limita opäť typu $\frac{0}{0}$, musíme daný výraz upraviť.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)+\tan^2(x)}{x\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos^2(x)} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{((1) a (2))} \\
&= 1 + 1\cdot 1 = 2. && \text{((7), definícia 3 a dôsledok 6)}
\end{aligned}$$

✈

Príklad 10. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} (x^2+3)^{\frac{\sin x}{x}}.$$

Ani v tomto prípade nemôžeme využiť spojitosť a jednoducho dosadiť 0 do daného výrazu. Tiež na prvý pohľad nie je zrejmé, či sa dá daná funkcia napísať ako zloženie $f\circ g$, kde f je spojitá v $\lim_{x\to 0} g(x)$. Preto využijeme vzťah $A=\mathrm{e}^{\log A}$, kde $A>0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (x^2+3)^{\frac{\sin x}{x}} &= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}\cdot\log(x^2+3)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\log(x^2+3)} && \text{((10) na } \mathrm{e}^x\text{)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\log(x^2+3)} && \text{((2))} \\
&= \mathrm{e}^{1\cdot\log\lim_{x\to 0}(x^2+3)} && \text{((7) a (10) na } \log x\text{)} \\
&= \mathrm{e}^{1\cdot\log 3} = 3
\end{aligned}$$

✈

Príklad 11. Vypočítajte limity

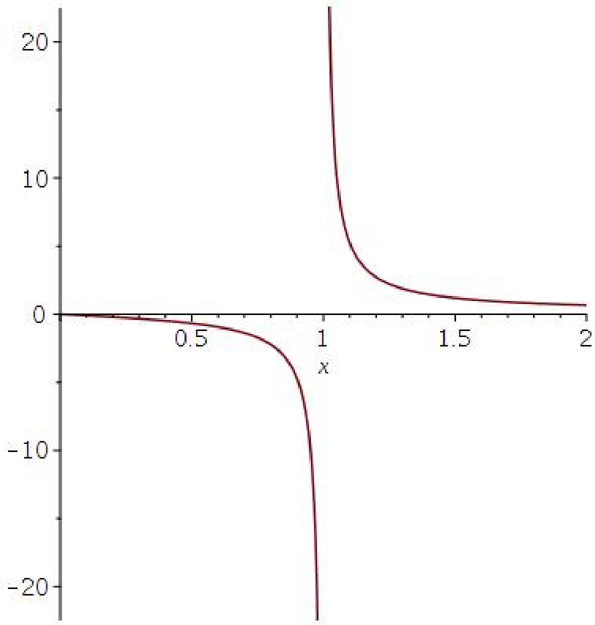
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right), \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

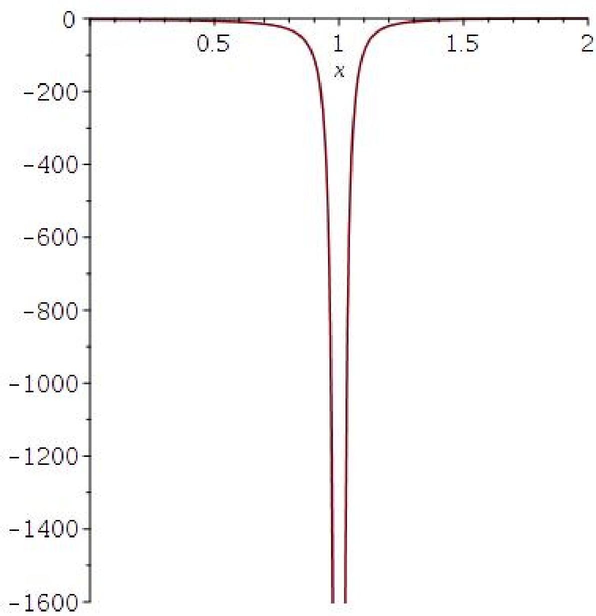
Výrazy v limite najskôr upravíme.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)(x-1)},$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

Dostali sme výrazy typu $\frac{1}{0}$ a $\frac{-1}{0}$. V obidvoch prípadoch sme v situácii, kedy konštantu delíme číslom veľmi blízkym k nule. Musíme overiť, či znamienko tohto čísla, malého v absolútnej hodnote, závisí od smeru, v ktorom sa k nule blížime. Vyšetríme teda jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{1^+}{2^+\cdot 0^+}=\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{-1^+}{(0^+)^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{1^-}{2^-\cdot 0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{-1^-}{(0^-)^2}=-\infty$$





Vysvetlime si použité značenie. Symboly c^+ a c^- reprezentujú čísla o kúsok väčšie respektíve menšie ako c, teda v prípade ak sa nevyskytujú pod operátorom lim - tam značia počítanie jednostrannej limity. Keďže existencia a rovnosť jednostranných limít je ekvivalentná existencii limity, v prvom prípade limita neexistuje a v druhom existuje a je rovná $-\infty$. ✈

Príklad 12. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-1}.$$

Výraz si zapíšeme v tvare súčinu, aby sme mohli použiť pravidlo (9):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\sin x}_{\text{funkcia idúca do 0}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2-1}}_{\text{ohraničená funkcia}}\right)=0. \qquad ✈$$

Príklad 13. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{e}^x + x^3 - 4}{\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + 1}.$$

V takýchto prípadoch vyjmeme aj z čitateľa aj z menovateľa člen, ktorý pre $x \to \infty$ najrýchlejšie rastie. V našom prípade je to e^{2x}.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{e}^x + x^3 - 4}{\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{5}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1 + \frac{4x^2}{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{4}{\mathrm{e}^{2x}}}{1 + \frac{4x^2}{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}} = \frac{0+0-0}{1+0+0} = 0.$$ ✈

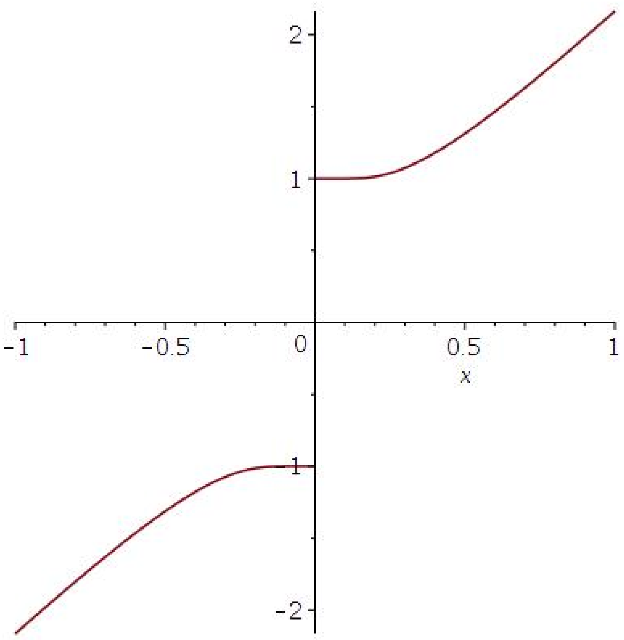
Príklad 14. Rozhodnite, či je možné uvedenú funkciu spojito dodefinovať v bode 0:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

Potrebujeme zistiť, či limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ existuje, a či je konečná. Za tým účelom spočítame jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$



Obidve jednostranné limity síce existujú a sú vlastné, no sú rôzne, čo znamená, že funkcia f má v bode 0 skok a tým pádom nemôže byť spojito dodefinovaná. ✈

Derivácia funkcie

Veta 15. *Nech majú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ vlastnú deriváciu v bode x a nech $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom platia nasledujúce rovnosti:*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \tag{11}$$

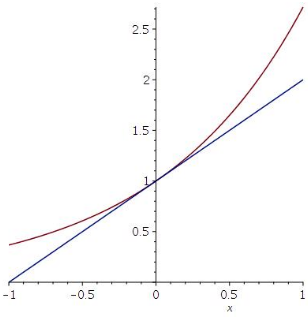
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \tag{12}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \tag{13}$$

$$\textit{Ak } g(x) \neq 0, \textit{ tak tiež } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{14}$$

Príklad 16. Z definície derivácie vypočítajte $f'(0)$, kde

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$



Počítajme:

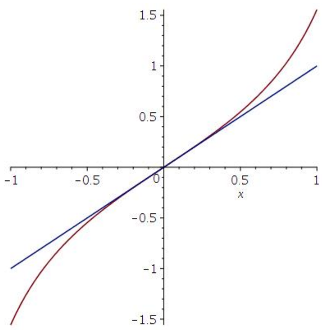
$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \\ &= 1. \qquad (5)\end{aligned}$$

✈

Príklad 17. Z definície derivácie vypočítajte $f'(0)$, kde

$$f(x) = \tan x.$$

Počítajme:



$$\begin{aligned}(\tan x)'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \qquad (2) \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \qquad ((7),\ \text{definícia 3 a dôsledok 6})\end{aligned}$$

✈

Príklad 18. Zderivujte funkciu

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 - 7x}.$$

Pri derivovaní zložitejších výrazov musíme identifikovať operácie, ktoré daný výraz skonštruovali. Budeme postupovať od poslednej operácie k prvej a aplikujeme na ne pravidlá pre derivovanie. V našom prípade bol podiel, použitý na výrazy $x^3 - 4x^2 + 5$ a $x^2 - 7x$, poslednou operáciou konštruujúcou daný výraz. Preto začneme pravidlom pre derivovanie zlomku (14):

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x^2 - 7x}\right)' &= \frac{(x^3 - 4x^2 + 5)'(x^2 - 7x) - (x^3 - 4x^2 + 5)(x^2 - 7x)'}{(x^2 - 7x)^2} && (14) \\ &= \frac{((x^3)' - (4x^2)' + (5)')(x^2 - 7x) - (x^3 - 4x^2 + 5)((x^2)' - (7x)')}{(x^2 - 7x)^2} && (12) \\ &= \frac{((x^3)' - 4(x^2)' + (5)')(x^2 - 7x) - (x^3 - 4x^2 + 5)((x^2)' - 7(x)')}{(x^2 - 7x)^2} && (11) \\ &= \frac{(3x^2 - 4 \cdot 2x + 0)(x^2 - 7x) - (x^3 - 4x^2 + 5)(2x - 7)}{(x^2 - 7x)^2} && ((x^n)' = nx^{n-1}) \\ &= \frac{x^4 - 14x^3 + 28x^2 - 10x + 35}{(x^2 - 7x)^2}.\end{aligned}$$

✈

Príklad 19. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály v bode $x = 2$ ku grafu funkcie

$$\frac{2x+1}{x^3+x-5}.$$

Rovnica dotyčnice v bode x_0 má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

a rovnica normály je

$$y - f(x_0) = a \cdot (x - x_0),$$

kde smernica a je daná vzťahom $a \cdot f'(x_0) = -1$. Najprv spočítame deriváciu:

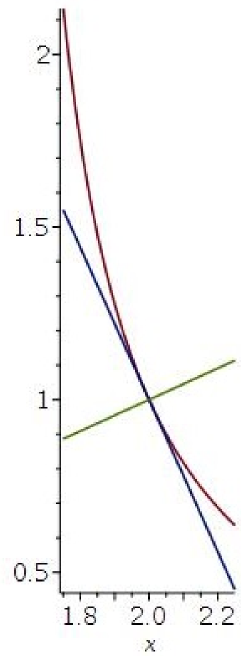
$$\left(\frac{2x+1}{x^3+x-5}\right)' = \frac{(2x+1)'(x^3+x-5) - (2x+1)(x^3+x-5)'}{(x^3+x-5)^2} \tag{14}$$

$$= \frac{((2x)' + (1)')(x^3+x-5) - (2x+1)((x^3)' + (x)' - (5)')}{(x^3+x-5)^2} \tag{12}$$

$$= \frac{(2(x)' + (1)')(x^3+x-5) - (2x+1)((x^3)' + (x)' - (5)')}{(x^3+x-5)^2} \tag{11}$$

$$= \frac{(2 \cdot 1 + 0)(x^3+x-5) - (2x+1)((3x^2 + 1 - 0)}{(x^3+x-5)^2} \qquad ((x^n)' = nx^{n-1})$$

$$= \frac{-4x^3 - 3x^2 - 11}{(x^3+x-5)^2}.$$



Zrejme platí

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^3 + 2 - 5} = 1, \quad f'(2) = \frac{-4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 11}{(2^3 + 2 - 5)^2} = \frac{-11}{5}.$$

Rovnica dotyčnice je

$$y - 1 = -\frac{11}{5}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{11}{5}x + \frac{27}{5},$$

a keďže $\frac{5}{11} \cdot (-\frac{11}{5}) = -1$, má rovnica normály tvar

$$y - 1 = \frac{5}{11}(x-2) \Rightarrow y = \frac{5}{11}x + \frac{1}{11}.$$

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana. a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*