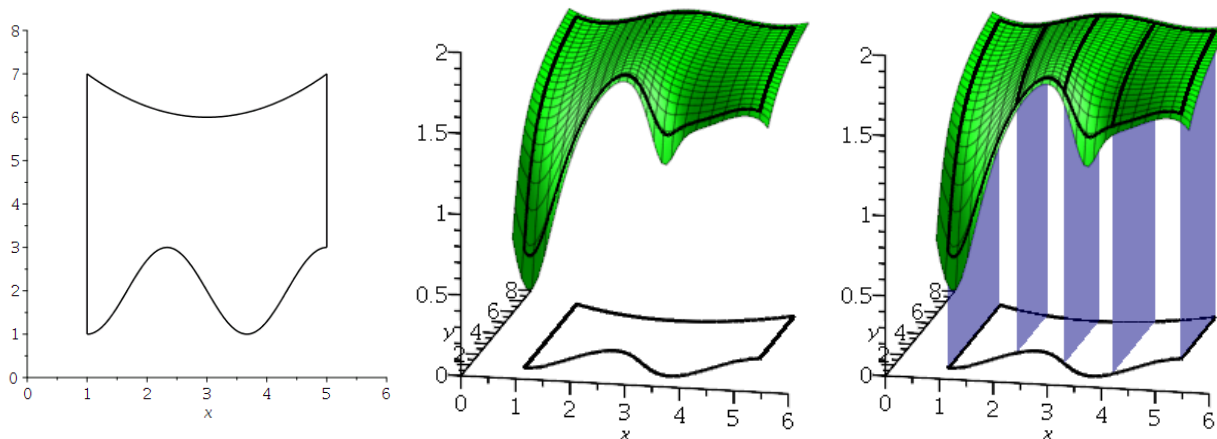


Viacnásobný a viacrozmerný integrál

Fubiniho veta je prostriedok, ktorý nám umožňuje previesť viacrozmerný integrál na viacnásobný integrál. Jej tvrdenie sa dá ilustrovať nasledujúcim obrázkom:



Predpokladajme, že funkcia $f(x, y)$ je spojitá na množine

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde φ a ψ sú spojité funkcie na intervale $[a, b]$. Definujme funkciu $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nasledujúcim predpisom: $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$. Pre každé pevne zvolené $x \in [a, b]$ je $f(x, y)$ spojitá funkcia (jednej) premennej y definovaná na intervale $[\varphi(x), \psi(x)]$, takže predošlá definícia má zmysel. Fubiniho veta hovorí o platnosti nasledujúcej rovnosti:

$$\iint_M f(x, y) dx dy \stackrel{1}{=} \int_a^b F(x) dx \stackrel{2}{=} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{3}{=} \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx.$$

Táto veta teda tvrdí, že objem telesa, ktoré je ohraničené rovinou xy a grafom funkcie f , vypočítame súčtom plôch rezov tohto telesa všetkými nekonečne veľa rovinami $x = x_0 \in [a, b]$.

Samozrejme, tvrdenie platí aj v prípade zámény úloh premenných x a y . Analogické tvrdenie platí pre funkcie ľubovoľného počtu premenných. V takom prípade musíme byť schopní usporiadať jednotlivé premenné tak, aby množina, cez ktorú integrujeme bola vyjadriteľná v tvare $x_i \in [a_i, b_i]$, pre každú premennú x_i , kde hranice tohto intervalu môžu závisieť len od premenných, ktoré sú v spomínanom usporiadaní predchodcami premennej x_i . Špeciálne, po správnom použití Fubiniho vety má posledný integrál konštantné medze. Opak svedčí o výskyte chyby. Uvedme ešte jednu poznámku. V prípade viacrozmerného integrálu chápeme diferenciály na jeho konci ako jeden symbol, a ich poradie pre naše účely nie je podstatné. Avšak pri práci s viacnásobným integrálom, špeciálne po použití Fubiniho vety, je každý diferenciál samostatný symbol a ich vzájomné poradie je podstatné. Viažu sa totiž na integračné medze zapísané pri integrálnom znaku a pripomínajú nám poradie integrovania jednotlivých premenných, teda kedy máme ktorú premennú integrovať.

¹Tvrdenie Fubiniho vety.

²Definícia funkcie F .

³Zátvorky sa zvyknú vynechávať.

Príklad 1. Vypočítajte dvojný integrál

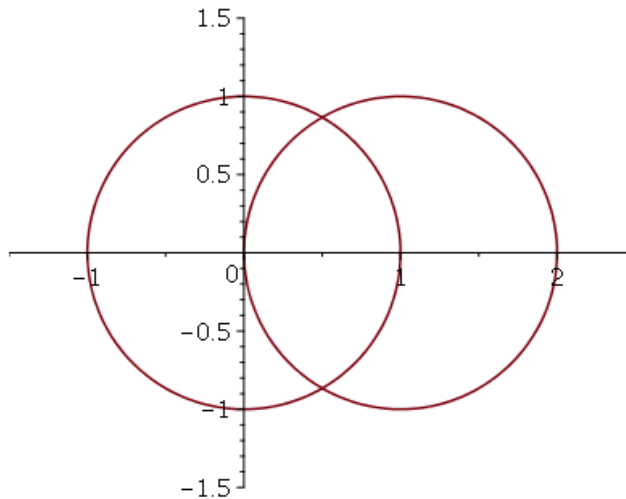
$$\iint_M y \, dx \, dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

Najprv nájdeme vyjadrenie množiny M , ktoré spĺňa predpoklady Fubiniho vety. Množina M je časťou prieniku kruhu so stredom v bode $(0,0)$ s polomerom 1 s doplnkom kruhu so stredom v bode $(1,0)$ s polomerom 1, ktorá leží nad osou x . Ak ju rozdelíme, na dve časti, podľa toho, či je $x \leq 0$, alebo $x > 0$ dostaneme dve množiny, ktoré sú elementárne vzhľadom k ose x :

$$A = M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

$$B = M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}, \sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$



Môžeme počítať:

$$\begin{aligned} \iint_M y \, dx \, dy &= \iint_A y \, dx \, dy + \iint_B y \, dx \, dy = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2 - (1-(x-1)^2)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} -2x + 1 dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} [-x^2 + x]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Príklad 2. Zameňte poradie integrácie nasledujúceho dvojnásobného integrálu:

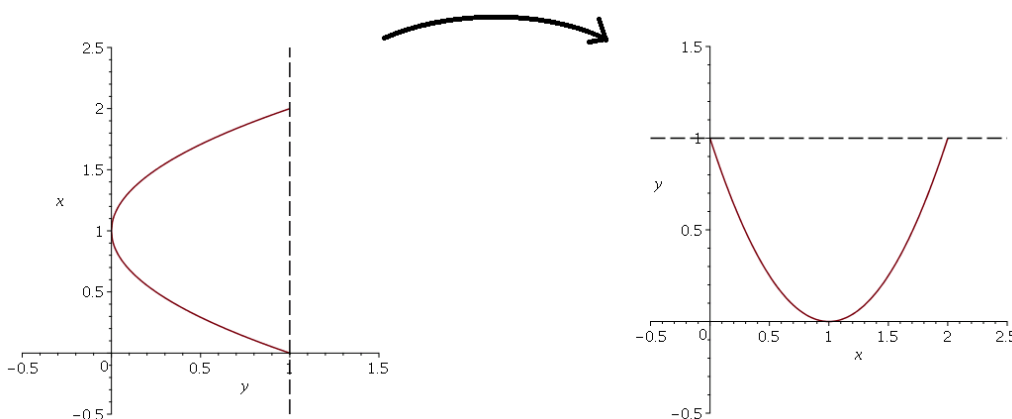
$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Podľa Fubiniho vety platí

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx dy = \iint_M f(x, y) dx dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1 - \sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{y}\}$, teda množina M je elementárna vzhľadom k ose y . Našou úlohou je, ak je to možné, nájsť vyjadrenie množiny M , ktoré z nej urobí množinu elementárnu vzhľadom k ose x , a potom opäť použiť Fubiniho vetu, ktorá prevedie dvojný integrál $\iint_M f(x, y) dx dy$ na dvojnásobný s tým rozdielom, že tentokrát budeme integrovať najprv premennú y a až potom premennú x . Môžeme si pomôcť obrázkom.

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - \sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{y} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ x \leq 1 + \sqrt{y} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \leq y \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$



Preto platí

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_{(x-1)^2}^1 f(x, y) dy dx.$$

Všimnite si opačné poradie diferenciálov. ✈

Príklad 3. Vypočítajte dvojnásobný integrál

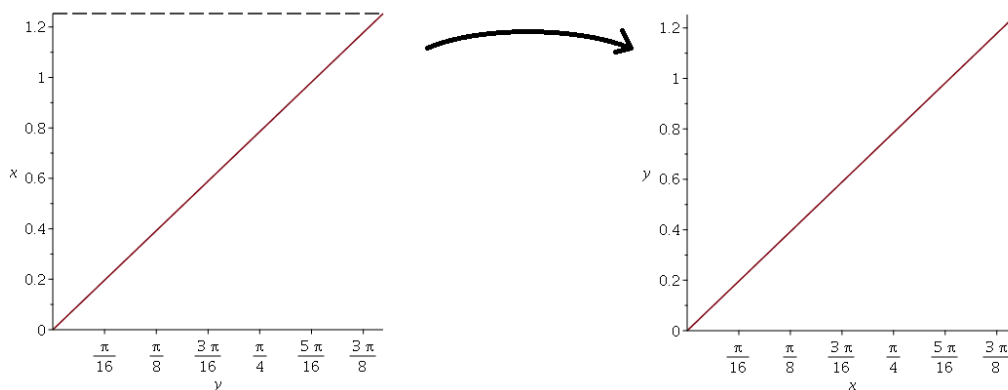
$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 dx dy.$$

Hneď po prvom kroku

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin x^2 dx dy$$

zistíme, že tadiaľto cesta nevedie, keďže funkcia $\int \sin x^2 dx$ je vyššia transcendentná. Musíme zameniť poradie integrácie.

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ y \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \leq y \leq x \end{aligned}$$



Počítajme:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^x y^2 \sin x^2 \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left[\frac{y^3 \sin x^2}{3} \right]_0^x \, dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x^3 \sin x^2}{3} \, dx \quad \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x \, dx \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right. = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \quad \left| \begin{array}{l} u' = \sin t \quad u = -\cos t \\ v = t \quad v' = 1 \end{array} \right. \\
 &= \frac{1}{6} [-t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \frac{1}{6} [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}. \quad \rightarrow
 \end{aligned}$$

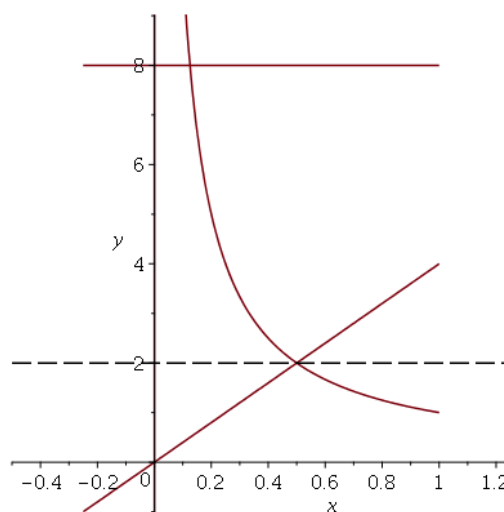
Príklad 4. Vypočítajte plochu útvaru M , ktorý je ohraničený krivkami $x = 0$, $y = 1/x$, $y = 4x$ a $y = 8$.

Obsah útvaru alebo presnejšie miera množiny M je daná vzťahom

$$m(M) = \iint_M 1 \, dx \, dy.$$

Preto nám stačí zistiť, či sa dá množina M poskladať z elementárnych množín vzhľadom k niektorej zo súradnicových osí a následne použiť Fubiniho vetu. Pomôžeme si obrázkom. Krivky $y = \frac{1}{x}$ a $y = 4x$ sa pretínajú v bode $(\frac{1}{2}, 2)$. Množinu M môžeme vyjadriť ako zjednotenie $M = A \cup B$, kde

$$\begin{aligned}
 A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{y}{4}\}, \\
 B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 8, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}\}.
 \end{aligned}$$



Obidve z uvedených množín sú elementárne vzhľadom k ose y a ich prienik, úsečka, je množinou nulovej miery, takže sa môžeme pustiť do integrovania.

$$\iint_M 1 \, dx \, dy = \iint_A 1 \, dx \, dy + \iint_B 1 \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{4}} 1 \, dx \, dy + \int_2^8 \int_0^{\frac{1}{y}} 1 \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 [x]_0^{\frac{y}{4}} dy + \int_2^8 [x]_0^{\frac{1}{y}} dy = \int_0^2 \frac{y}{4} dy + \int_2^8 \frac{1}{y} dy = \left[\frac{y^2}{8} \right]_0^2 + [\log y]_2^8 \\
&= \frac{1}{2} + \log 4.
\end{aligned}$$



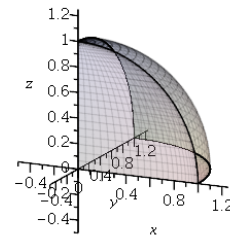
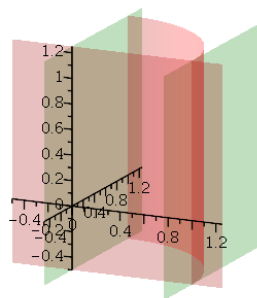
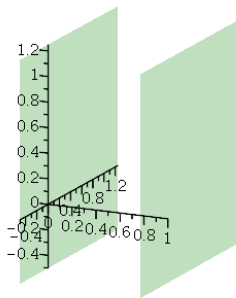
Príklad 5. Vypočítajte trojný integrál

$$\iiint_M (x+y)z \, dx \, dy \, dz,$$

kde M je osmina gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ležiaca v prvom oktante.

Množinu M môžeme určiť prostredníctvom nasledujúcich nerovností:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$



Množina M je elementárna vzhľadom k rovine xy , čo nám opäť umožní použitie Fubiniho vety:

$$\begin{aligned}
\iiint_M (x+y)z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x+y)z \, dz \, dy \, dx \\
&\quad \text{Pozor na poradie diferenciálov.} \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{(x+y)z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)(1-x^2-y^2) dy \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x - x^3 + y - x^2y - xy^2 - y^3 dy \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x-x^3)y + (1-x^2)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\frac{1-x^2}{2} - x\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{(1-x^2)^2}{4} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^2}{4} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 x(1-x^2)\sqrt{1-x^2} dx \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| + \frac{1}{8} \int_0^1 1-2x^2+x^4 dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt + \frac{1}{8} \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{30} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$



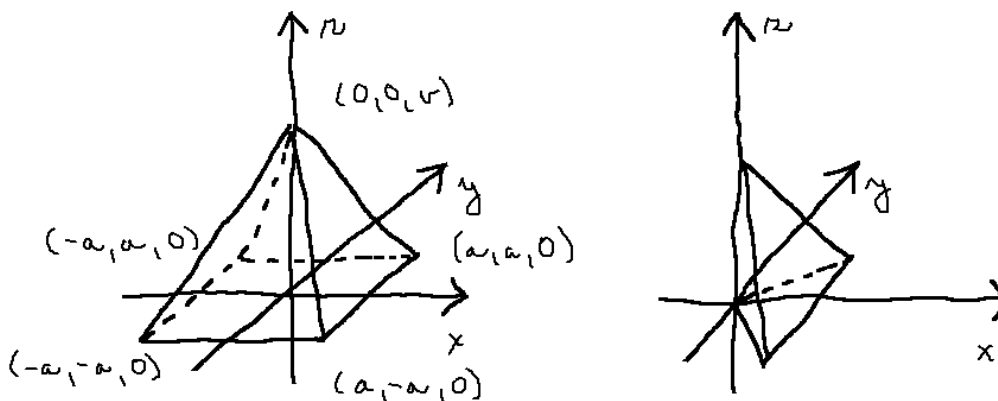
Príklad 6. Vypočítajte objem kolmého ihlanu so štvorcovou podstavou.

Označme symbolom v výšku ihlanu a symbolom $2a$ dĺžku strany jeho podstavy. Umiestnime tento ihlan do priestoru tak, aby vrcholy jeho podstavy boli body $(a, a, 0)$, $(-a, a, 0)$, $(-a, -a, 0)$ a $(a, -a, 0)$ a jeho vrchol mal súradnice $(0, 0, v)$. Ihlan môžeme rozdeliť na štyri rovnaké časti tak, že ho rozrežeme rovinami, v ktorých leží vrchol ihlanu a jedna z uhlopriečok jeho podstavy. Vypočítame objem jednej takejto štvrtiny. Jedna z týchto štvrtín môže byť popísaná nerovnosťami $0 \leq x \leq a$, $-x \leq y \leq x$ a z -ová súradnica je zdola ohraničená 0 a zhora stenou ihlanu. Preto potrebujeme túto stenu vyjadriť ako graf funkcie $z(x, y) = f(x, y)$. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o rovinu, má funkcia z tento tvar $z = bx + cy + d$. Koeficienty b , c a d dopočítame zo sústavy lineárnych rovníc, ktoré vzniknú dosadením súradníc bodov $(a, a, 0)$, $(a, -a, 0)$, $(0, 0, v)$ ležiacich na tejto stene.

$$\begin{aligned} 0 &= ba + ca + d & d &= v \\ 0 &= ba - ca + d & \Rightarrow & b = -\frac{v}{a} \\ v &= d & & c = 0 \end{aligned}$$

Označme symbolom M skúmanú štvrtinu ihlanu. Zistili sme, že M je určená nasledujúcimi nerovnosťami:

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a, \quad -x \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq -\frac{v}{a}x + v \right\}$$



Miera tejto množiny je opäť daná integrálom funkcie 1 cez množinu M :

$$\begin{aligned} m(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_{-x}^x \int_0^{-\frac{v}{a}x+v} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^a \int_{-x}^x [z]_0^{-\frac{v}{a}x+v} \, dy \, dx \\ &= \int_0^a \int_{-x}^x -\frac{v}{a}x + v \, dy \, dx = \int_0^a \left(-\frac{v}{a}x + v\right) [y]_{-x}^x \, dx = \int_0^a 2x \left(-\frac{v}{a}x + v\right) \, dx \\ &= \int_0^a \frac{-2x^2v}{a} + 2xv \, dx = \left[\frac{-2x^3v}{3a} + x^2v \right]_0^a = \frac{-2a^3v}{3a} + a^2v = \frac{a^2v}{3}. \end{aligned}$$

Objem ihlanu je preto $\frac{4a^2v}{3}$. Ak namiesto polovice dĺžky strany podstavy ihlanu a , použijeme dĺžku $b = 2a$, teda $a = \frac{b}{2}$ dostaneme známy vzorec $\frac{1}{3}b^2v$. \rightarrow

Transformácia integrálu

Náš jediný prostriedok, ako vypočítať viacrozmerný integrál je jeho redukcia prostredníctvom Fubiniho vety na integrál viacnásobný. Táto veta požaduje špeciálny tvar množiny M , cez ktorú integrujeme. Jedným zo spôsobov ako vyhovieť tejto podmienke je prechod k novému

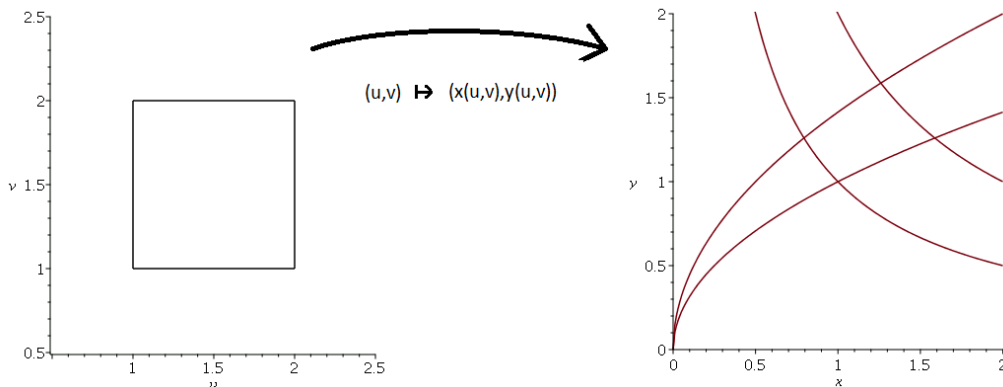
súradnicovému systému, v ktorom má množina M jednoduchší a hlavne požadovaný tvar. Tomuto postupu sa hovorí transformácia súradníc, respektíve integrálu. Zdôraznime, že zmenu súradnicového systému uskutočňujeme v prvom rade kvôli oboru integrácie a až v druhom rade kvôli zjednodušeniu integrovanej funkcie. Pri zmene súradníc nesmieme zabudnúť na absolútnu hodnotu jakobiánu použitej transformácie.

Príklad 7. Pomocou vhodnej transformácie vypočítajte dvojný integrál

$$\iint_M \sqrt{xy} \, dx \, dy,$$

kde M je množina ohraničená krivkami $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $xy = 1$ a $xy = 2$.

Prepíšme uvedené nerovnosti do nasledujúceho tvaru: $1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2$, $1 \leq xy \leq 2$. To nám ponúka možnosť zaviesť nové súradnice u a v nasledujúcim spôsobom: $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$. V takom prípade by množina, cez ktorú integrujeme, bola určená nerovnosťami $1 \leq u \leq 2$ a $1 \leq v \leq 2$ spĺňajúcimi predpoklady Fubiniho vety.



Vyjadrieme staré premenné v tých nových:

$$uv = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{uv}, \quad v = xy \Rightarrow x = \frac{v}{y} = \frac{v}{\sqrt[3]{uv}} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}.$$

Spočítajme Jakobián transformácie:

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} & \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{u}{v^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3u} \neq 0, \quad \text{pre } 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2,$$

takže navrhnutú transformáciu skutočne môžeme použiť.

$$\begin{aligned} \iint_M \sqrt{xy} \, dx \, dy &= \iint_{[1,2] \times [1,2]} \sqrt{v} \cdot \left| -\frac{1}{3u} \right| \, du \, dv = \int_1^2 \int_1^2 \sqrt{v} \cdot \left| -\frac{1}{3u} \right| \, du \, dv = \int_1^2 \int_1^2 \frac{\sqrt{v}}{3u} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{v} [\log u]_1^2 \, dv = \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{v} \log 2 \, dv = \frac{\log 2}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2 \log 2}{9} (2\sqrt{2} - 1). \quad \rightarrow \end{aligned}$$

Príklad 8. Vypočítajte dvojný integrál

$$\iint_M e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

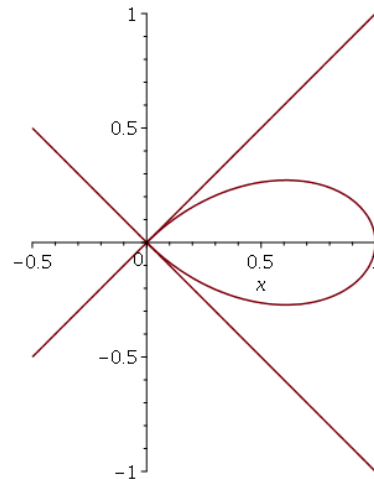
Vzhľadom k tomu, že množina cez ktorú integrujeme je polkruh nachádzajúci sa napravo od osi y so stredom v počiatku, má zmysel transformovať integrál do polárnych súradníc r a φ , ktoré sú dané rovnosťami $x = r \sin \varphi$ a $y = r \cos \varphi$. V nich je daná množina určená nerovnosťami $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ a $0 \leq r \leq 1$. Pripomeňme, že jakobián tejto transformácie je r . Môžeme počítať:

$$\begin{aligned} \iint_M e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]} e^{-r^2} |r| d\varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r e^{-r^2} dr d\varphi \left| \begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r dr \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ 1 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^{-t} dt d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-e^{-t}]_0^1 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-1}) d\varphi \\ &= \frac{1 - e^{-1}}{2} [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(1 - e^{-1})}{2}. \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Príklad 9. Vypočítajte obsah oblasti M nachádzajúcej sa v štvrtrovine $-x \leq y \leq x$ určenej nerovnosťou $(x^2 + y^2)^3 \leq (x^2 - y^2)^2$.

Štvrtrovina $-x \leq y \leq x$ je v polárnych súradniciach určená nerovnosťami $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Nerovnosť $(x^2 + y^2)^3 \leq (x^2 - y^2)^2$ má v tejto štvrtrovine v polárnych súradniciach tiež jednoduchší tvar:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^3 &\leq (x^2 - y^2)^2 \\ \Leftrightarrow (r^2)^3 &\leq (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi)^2 \\ \Leftrightarrow r^6 &\leq r^4 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2 \\ \Leftrightarrow r^2 &\leq (\cos 2\varphi)^2 \\ \Leftrightarrow r &\leq |\cos 2\varphi|. \end{aligned}$$



Uvedená množina teda má v polárnych súradniciach tvar vyhovujúci predpokladom Fubiniho vety, takže jej plochu môžeme vypočítať ako integrál cez túto množinu z funkcie 1:

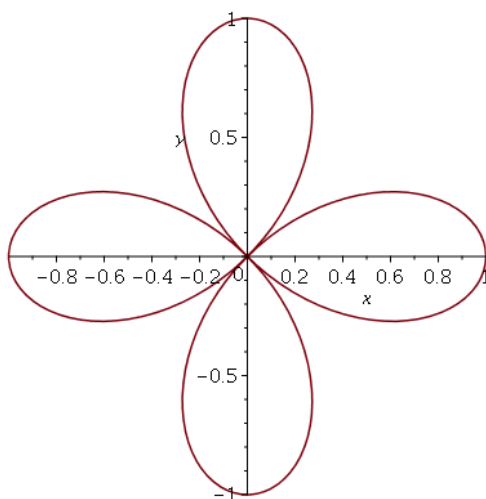
$$\begin{aligned} \iint_M 1 dx dy &= \iint_{\{(r,\varphi) | -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \cos 2\varphi\}} |r| dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\varphi} r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos 2\varphi)^2}{2} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{4} d\varphi = \left[\frac{\sin 4\varphi}{16} + \frac{\varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Takže plocha obrazca, ktorý ohraňuje krivka $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$ v celej rovine \mathbb{R}^2 je $\frac{\pi}{2}$. →

Príklad 10. Vypočítajte integrál

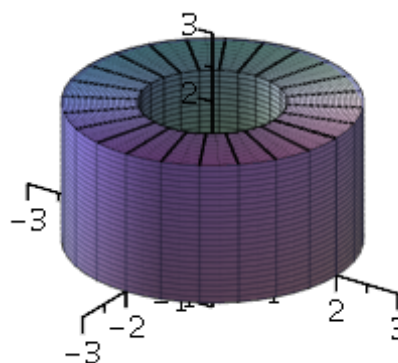
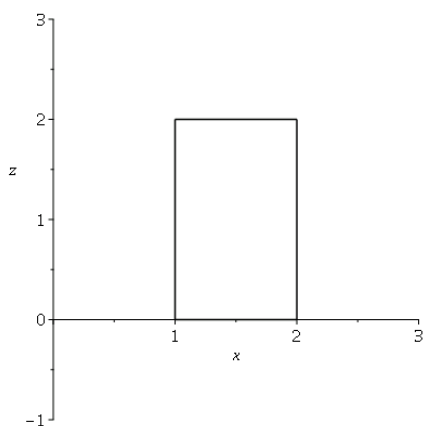
$$\iiint_M x^2 + y^2 dx dy dz,$$

kde M je množina, ktorá vznikne rotáciou obdĺžnika s vrcholmi $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 0, 2)$ a $(2, 0, 2)$ okolo osi z .



Obr. 1: Príklad 9

Vo valcových súradniciach⁴ má množina, cez ktorú integrujeme, veľmi jednoduchý tvar: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$ a $0 \leq z \leq 2$. Pripomeňme, že jakobián transformácie do valcových súradníc je r . Môžeme počítať:



$$\begin{aligned}
 \iiint_M x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,2\pi] \times [1,2] \times [0,2]} r^2 \cdot |r| \, d\varphi \, dr \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^2 r^3 \, dr \, dz \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 \, dz \, d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^2 dz \, d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} [z]_0^2 \, d\varphi = \frac{30}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{30}{4} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{30}{4} \cdot 2\pi = 15\pi.
 \end{aligned}$$

Vypočítali ste moment zotrvačnosti telesa M vzhľadom k jeho ose. ✈

Príklad 11. Určte objem telesa M v \mathbb{R}^3 , ktoré je ohraničené časťou kúžela $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ a paraboloidom $x^2 + y^2 = 4 - z$.

Upravme uvedené rovnosti tak, aby sme boli schopní si ich lepšie predstaviť. Paraboloid je grafom funkcie $z = 4 - x^2 - y^2$, čiže je otočený hore bruchom a jeho vrchol je posunutý do bodu $[0, 0, 4]$. Kúžeľ je daný rovnicou $z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, jeho vrchol je teda v bode $[0, 0, 2]$. Nájďme objem telesa M , ktoré je ohraničené paraboloidom a len tou „kladnou“ časťou kúžela, ktorej

⁴ $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Okrem materiálov z prednášky sú tieto súradnice popísané aj s obrázkom v [1] na strane 74 alebo v [3] na strane 140.

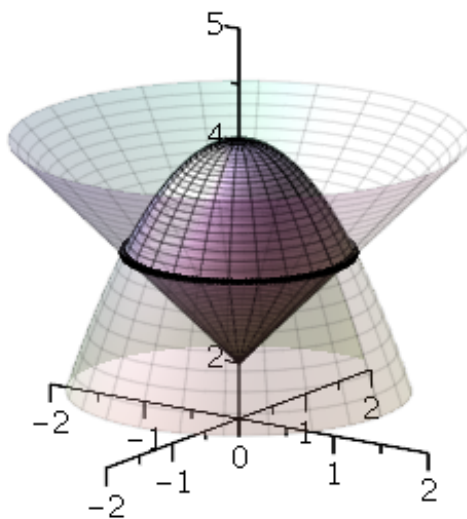
hrot smeruje dole, teda plochou, ktorá je grafom funkcie $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Teleso M je zrejme rotačné, konkrétne, vzniklo rotáciou istej plochy v rovine, povedzme zx , okolo osi z . Pre jeho popis bude teda vhodné zvoliť valcové súradnice. Ohraničenie pre súradnice φ a z je zrejme: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a

$$2 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + r \leq z \leq 4 - r^2.$$

Ohraničenie pre premennú r dostaneme tak, že nájdeme polomer valca, v ktorom sa celé uvažované teleso nachádza. K tomu nám pomôže prienik plôch $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$ a $x^2 + y^2 = 4 - z$. Z druhej rovnice môžeme dosadiť do prvej, čo nás privádza k rovnici

$$4 - z = (z - 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{0, 3\}.$$

To nás privádza k dvom kružniciam $z = 3, x^2 + y^2 = 1$ a $z = 0, x^2 + y^2 = 4$. Nás zaujíma len tá prvá z nich. Jej polomer je 1, a preto posledné nerovnosti, ktoré určujú teleso M sú $0 \leq r \leq 1$. Môžeme integrovať:



$$\begin{aligned} m(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\left\{ (r, \varphi, z) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 2+r \leq z \leq 4-r^2 \end{array} \right\}} |r| \, dr \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2+r}^{4-r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r [z]_{2+r}^{4-r^2} \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(4 - r^2 - 2 - r) \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^3 - r^2 + 2r) \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} + r^2 \right]_0^1 \, d\varphi = \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{5}{12} \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

✈

Príklad 12. Vypočítajte integrál

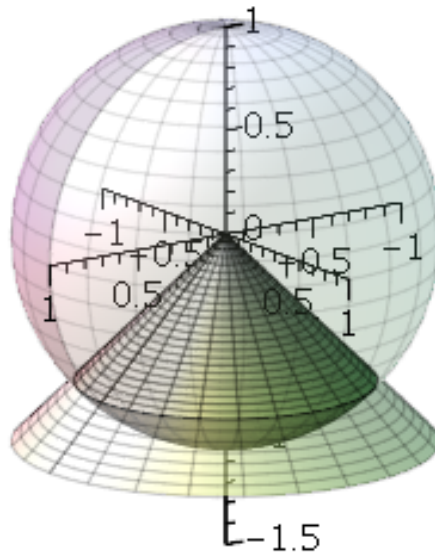
$$\iiint_M yz \, dx \, dy \, dz,$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Vzhľadom k tomu, že množina, cez ktorú integrujeme, je časťou gule, má zmysel transformovať integrál do sférických súradníc⁵. Nerovnosť $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určuje guľu so stredom v počiatku

⁵ $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$. Okrem materiálov z prednášky sú tieto súradnice popísané aj s obrázkom v [1] na strane 90 alebo v [3] na strane 141.

a polomerom 1. My z nej však berieme len tie body, ktoré ležia pod kúžeľom $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Takáto množina je určená nasledujúcimi nerovnosťami: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ a $\frac{3}{4}\pi \leq \vartheta \leq \pi$. Pripomeňme, že ϑ je uhol, ktorý zvierajú spojnica bodu s počiatkom s kladnou časťou osi z . Jakobián transformácie do sférických súradníc je $-r^2 \sin \vartheta$. Môžeme počítať:



$$\begin{aligned} \iiint_M yz \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,2\pi] \times [0,1] \times [\frac{3}{4}\pi, \pi]} r \sin \varphi \sin \vartheta \cdot r \cos \vartheta \cdot |-r^2 \sin \vartheta| \, d\varphi \, dr \, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} r^3 \sin \varphi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Ďalej by sme kľudne mohli pokračovať rovnako ako v predošlých príkladoch. Toto je však vhodná situácia na ukážku jedného užitočného pravidla. Predpokladajme, že počítame viacnásobný integrál s konštantnými medzami a navyše premenné v integrande vieme separovať, teda máme dočinenia s nasledujúcim integrálom:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x)g(y)h(z) \, dz \, dy \, dx.$$

Potom platí

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x)g(y)h(z) \, dz \, dy \, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} g(y) \, dy \cdot \int_{z_1}^{z_2} h(z) \, dz.$$

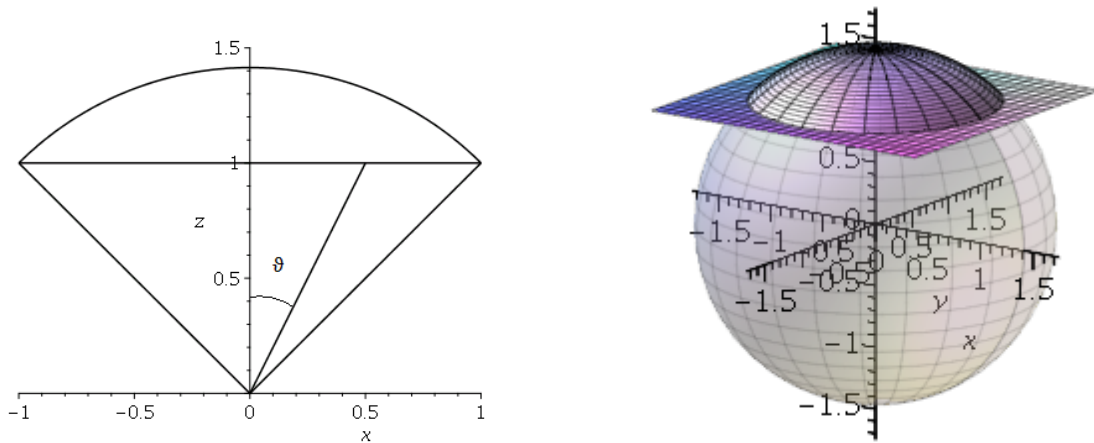
Takéto pravidlo funguje pre ľubovoľný počet dimenzií. V našom prípade sa dostaneme k súčinu nasledujúcich troch integrálov:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \quad \left| \begin{array}{l} t = \sin \vartheta \\ dt = \cos \vartheta \, d\vartheta \\ \frac{3}{4}\pi \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi \rightsquigarrow 0 \end{array} \right. \\ &= \underbrace{[-\cos \varphi]_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left(- \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 \, dt \right) = 0 \end{aligned}$$

Všimnime si, že množina, cez ktorú sme integrovali bola symetrická vzhľadom k rovine zx a že integrovaná funkcia $f(x, y, z)$ bola nepárna v premennej y , teda spĺňala rovnosť $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$. To znamená, že počítaný integrál musel byť nulový. Evidentne občasnú zamyslenie môže ušetriť kopec roboty. ➔

Príklad 13. Vypočítajte objem guľového odseku M , ktorý odrezáva rovina $z = 1$ z gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

V prvom rade vypočítame prienik guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ s rovinou $z = 1$. Tým je kružnica $x^2 + y^2 = 1$ vo výške $z = 1$, ktorej polomer je 1. Vďaka tomu vieme, že body uvažovaného odseku spĺňajú nerovnosti $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$. Stačí vyšetriť súradnicu r . Keďže sa jedná o guľový odsek, je zrejme zhora ohraničená polomerom gule, teda $\sqrt{2}$. Dolné ohraničenie závisí od odklonu od osi z , teda od súradnice ϑ , o čom sa ľahko presvedčíme použitím akéhokoľvek rezu rovinou, v ktorej leží os z . Pre daný uhol ϑ je dolné ohraničenie súradnice r preponou v pravouhlom trojuholníku, v ktorom má príľahlá odvesna k uhlu ϑ dĺžku 1. Z vlastností goniometrických funkcií dostávame nerovnosť $\frac{1}{\cos \vartheta} \leq r$. Môžeme integrovať:



$$\begin{aligned}
 \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\left\{ (r, \varphi, \vartheta) \left| \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\cos \vartheta} \leq r \leq \sqrt{2} \end{array} \right. \right\}} |-r^2 \sin \vartheta| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos \vartheta}}^{\sqrt{2}} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\frac{1}{\cos \vartheta}}^{\sqrt{2}} d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3 \cos^3 \vartheta} \right) d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3 \cos^3 \vartheta} \right) d\vartheta \\
 &= 2\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \, d\vartheta - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta \right) \left| \begin{array}{l} t = \cos \vartheta \\ dt = -\sin \vartheta \, d\vartheta \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \\
 &= 2\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t^3} dt \right) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) + \frac{2\pi}{3} \left[\frac{1}{2t^2} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
 &= \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) + \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{3} (4\sqrt{2} - 5).
 \end{aligned}$$

Tento príklad bol vyriešený v *Matematika drsne a svižne* na strane 467 iným spôsobom. ➔

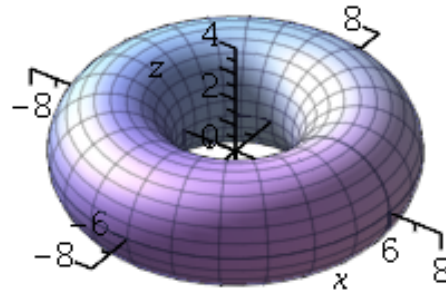
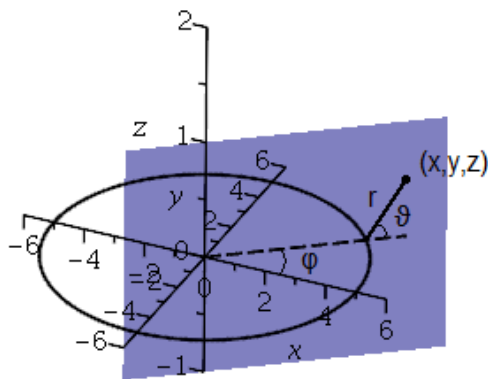
Príklad 14. Vypočítajte moment zotrvačnosti plného torusu M jednotkovej hustoty pri rotácii okolo jeho osi.

V prvom rade vhodne umiestnime torus do priestoru. Predpokladajme, že vznikol rotáciou kruhu ležiaceho v rovine xz so stredom v bode $[a, 0, 0]$ a polomerom b , kde $b < a$, okolo osi z . V takom prípade je os z jeho osou, a preto je moment zotrvačnosti daný nasledujúcim integrálom:

$$\iiint_M x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz.$$

Nie je ťažké sa presvedčiť o tom, že aj vo valcových aj v sférických súradniciach má torus tvar, ktorý nám po transformácii integrálu umožní použiť Fubiniho vetu. V oboch prípadoch však v integrandoch vzniknú nepríjemné odmocniny. Skúsme preto použiť iný, vhodnejší súradnicový systém. Nové súradnice označíme symbolmi φ , r a ϑ . Význam symbolu φ je rovnaký ako v prípade valcových a sférických súradníc, teda je to odchýlka projekcie spojnice bodu (x_0, y_0, z_0) s počiatkom do roviny xy s kladnou časťou osi x proti smeru hodinových ručičiek. Uvažujme polovinu P určenú bodom (x_0, y_0, z_0) a osou z . Táto polovina pretína kružnicu $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ v práve jednom bode, povedzme p . Symboly r a ϑ reprezentujú polárne súradnice v polovine P so stredom v bode p . Táto geometrická predstava nám umožní odvodiť vzťah medzi starými kartézskymi súradnicami (x, y, z) a novými súradnicami (φ, r, ϑ) a v konečnom dôsledku aj popísať torus M v týchto nových súradniciach:

$$\begin{aligned} x &= (a + r \cos \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (a + r \cos \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \sin \vartheta \end{aligned} \quad M = g(\{(\varphi, r, \vartheta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}),$$



kde g označuje transformáciu do nových súradníc. Pred tým, než sa pustíme do integrovania, musíme ešte spočítať determinant jakobiánu použitej transformácie:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_\varphi & x_r & x_\vartheta \\ y_\varphi & y_r & y_\vartheta \\ z_\varphi & z_r & z_\vartheta \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -(a + r \cos \vartheta) \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ (a + r \cos \vartheta) \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= -\sin \vartheta \begin{vmatrix} -(a + r \cos \vartheta) \sin \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ (a + r \cos \vartheta) \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \end{vmatrix} + r \cos \vartheta \begin{vmatrix} -(a + r \cos \vartheta) \sin \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi \\ (a + r \cos \vartheta) \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -\sin \vartheta (r(a + r \cos \vartheta) \sin \vartheta \sin^2 \varphi + r(a + r \cos \vartheta) \sin \vartheta \cos^2 \varphi) \\ &\quad + r \cos \vartheta (-(a + r \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin^2 \varphi - (a + r \cos \vartheta) \cos \vartheta \cos^2 \varphi) \\ &= -r(a + r \cos \vartheta) \sin^2 \vartheta - r(a + r \cos \vartheta) \cos^2 \vartheta = -r(a + r \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Môžeme integrovať:

$$\iiint_M x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0, 2\pi] \times [0, b] \times [0, 2\pi]} (a + r \cos \vartheta)^2 |-r(a + r \cos \vartheta)| \, d\varphi \, dr \, d\vartheta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{2\pi} r(a + r \cos \vartheta)^3 d\vartheta dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{2\pi} a^3 r + 3a^2 r^2 \cos \vartheta + 3ar^3 \cos^2 \vartheta + r^4 \cos^3 \vartheta d\vartheta dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \left[a^3 r \vartheta + 3a^2 r^2 \sin \vartheta + 3ar^3 \left(\frac{\sin 2\vartheta}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) + r^4 \left(\sin \vartheta + \frac{\sin^3 \vartheta}{3} \right) \right]_0^{2\pi} dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^b \left[a^3 r \vartheta + \frac{3ar^3 \vartheta}{2} \right]_0^{2\pi} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^b 2\pi a^3 r + 3\pi ar^3 dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\pi a^3 r^2 + \frac{3\pi ar^4}{4} \right]_0^b d\varphi = \int_0^{2\pi} \pi a^3 b^2 + \frac{3\pi ab^4}{4} d\varphi = 2\pi \left(\pi a^3 b^2 + \frac{3\pi ab^4}{4} \right) \\
&= 2\pi^2 b^2 a \left(a^2 + \frac{3b^2}{4} \right). \quad \blackrightarrow
\end{aligned}$$

Literatúra

- [1] PLCH, Roman, ŠARMANOVÁ, Petra a SOJKA, Petr. *Integrální počet funkcí více proměnných*, https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/integral/publikace/Integraly_funkce_promenne_v2.pdf
- [2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf
- [3] KALAS, Josef a KUBEN, Jaromír. *Integrální počet funkcí více proměnných*