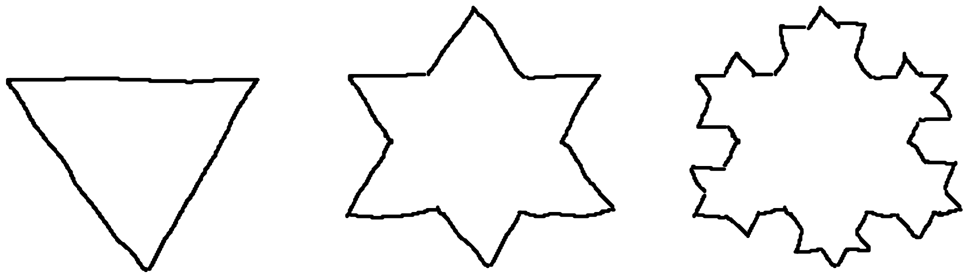
MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 11. cvičenie, 6.1.2021

Nekonečné rady

Príklad 1. Vypočítajte plochu Kochovej vločky.

Kochova vločka je fraktál, ktorý môžeme skonštruovať nasledujúcim spôsobom. V nultom kroku máme rovnostranný trojuholník. V kroku $n+1$ každú úsečku tvoriacu objekt z predošlého kroku rozdelíme na tri rovnaké časti a prostrednú časť nahradíme dvomi úsečkami tejto dĺžky tak, aby spolu so zvyškom obrazca tvorili súvislú lomenú čiaru maximalizujúcu ohraničenú plochu. Toto zopakujeme ∞-krát.



Vypočítame plochu, ktorú ohraničuje Kochova krivka. Označme symbolmi a a S dĺžku strany, respektíve obsah pôvodného trojuholníka. Pri konštrukcii sa zakaždým zväčší plocha o súčet obsahov niekoľkých trojuholníkov, preto potrebujeme zistiť ich obsahy a počet. V každom kroku počet úsečiek narastie štyrikrát a v kroku $n+1$ pribudne toľko trojuholníkov, koľko úsečiek tvorí obrazec v kroku n. Dĺžka strany pridávaných trojuholníkov sa v každom kroku zmenší trikrát, takže ich obsah sa zmenší deväťkrát. Celková plocha P je

$$\begin{aligned} P &= S + 3\cdot\frac{1}{9}S + 3\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 S + 3\cdot 4^2\left(\frac{1}{9}\right)^3 S + 3\cdot 4^3\left(\frac{1}{9}\right)^4 S + \cdots \\ &= S + \frac{3}{9}\left(S + \frac{4}{9}S + \left(\frac{4}{9}\right)^2 S + \left(\frac{4}{9}\right)^3 S\right) = S + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n S = S\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{8}{5}S. \end{aligned}$$

Pozrime sa na dĺžku Kochovej krivky. V skutočnosti v každom kroku rozdelíme všetky úsečky na tretiny a do obrazca pridáme ešte tretinu tohto nového počtu úsečiek. Celková dĺžka krivky sa preto zväčší $\frac{4}{3}$-krát. Jej dĺžka D je

$$D = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n a = \infty.$$

Kochova krivka je príkladom krivky s nekonečnou dĺžkou ohraničujúcej plochu s konečným obsahom. ✈

Príklad 2. Určte súčet nasledujúceho radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Najprv upravíme jednotlivé členy a_n. Použijeme rozklad na parciálne zlomky:

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

Poslednú rovnosť vynásobíme spoločným menovateľom a dopočítame koeficienty A a B:

$$1 = A(2n+1) + B(2n-1) \Rightarrow 1 = (2A+2B)n + A - B \Rightarrow \begin{array}{c} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{array}.$$

Teraz sa pozrieme na n-tý čiastočný súčet s_n:

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + \cdots + a_n &= \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{5} - \frac{\frac{1}{2}}{7} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

V konečnom dôsledku dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

✈

Príklad 3. Vyriešte nasledujúcu rovnicu:

$$1 - \tan x + \tan^2 x - \tan^3 x + \cdots = \frac{\tan 2x}{1 + \tan 2x}.$$

Ľavá strana rovnice je geometrický rad:

$$\begin{aligned} 1 - \tan x + \tan^2 x - \tan^3 x + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-\tan x)^n = \frac{1}{1+\tan x} &= \frac{\tan 2x}{1+\tan 2x} \\ \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \sin 2x} \\ \cos x(\cos 2x + \sin 2x) &= \sin 2x(\cos x + \sin x) \\ \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x) &= 2\sin x\cos x(\cos x + \sin x) \\ \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x &= 2\sin x(\cos x + \sin x) \\ \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x &= 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x \\ \cos^2 x - 3\sin^2 x &= 0 \\ 4\cos^2 x - 3 &= 0 \\ \cos x &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} &\cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Pri výpočte sme využili fakt, že kvocient q spĺňal $|q| = |-\tan x| < 1$, ktorý musíme spätne overiť:

$$|\tan x| = \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

✈

Príklad 4. Nech je postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ daná rekurentne rovnosťou $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Rozhodnite o konvergencii radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Riešenie rekurentného vzťahu $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ má tvar $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a λ_1 a λ_2 sú koreňmi rovnice $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Zrejme platí $\lambda_{1,2} \in \{1, 2\}$, takže $a_n = c_1 2^n + c_2$ pre akékoľvek $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Overme nutnú podmienku konvergencie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 2^n + c_2) = \begin{cases} \infty, & c_1 > 0, \\ -\infty, & c_1 < 0, \\ c_2, & c_1 = 0. \end{cases}$$

Vidíme, že nutná podmienka konvergencie je splnená len v prípade $c_1 = c_2 = 0$, teda len ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0\}_{n=0}^{\infty}$. Iba v tejto situácii uvedený rad konverguje so súčtom 0. ✈

Príklad 5 (porovnávacie kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Podľa porovnávacieho kritéria rad diverguje. ✈

Príklad 6 (porovnávacie kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n!)}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n!)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n + \log(n-1) + \cdots + \log 2 + \log 1)} \\ &\leq 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Uvedený rad obsahuje len nezáporné členy, a preto podľa porovnávacieho kritéria konverguje. ✈

Príklad 7 (integrálne kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}.$$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\infty} \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} u = \log x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| &= \left[-\frac{\log x}{x} \right]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\infty} + \int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} + \left[-\frac{1}{x} \right]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}}} < \infty.\end{aligned}$$

Keďže je funkcia $\frac{\log x}{x^2}$ nezáporná a nerastúca na intervale $[\sqrt{\mathrm{e}}, \infty)$, je uvedený rad podľa integrálneho kritéria konvergentný. ✈

Príklad 8 (integrálne kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} x = t^2 & 0 \rightsquigarrow 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & \infty \rightsquigarrow \infty \end{matrix} \right| &= 2 \int_{0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{-t} & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{matrix} \right| \\ &= 2\left[-t\mathrm{e}^{-t} \right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_0^{\infty} = 2 < \infty.\end{aligned}$$

Keďže je funkcia $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ nezáporná a nerastúca na intervale $[0, \infty)$, je uvedený rad podľa integrálneho kritéria konvergentný. ✈

Príklad 9 (podielové kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n},$$

v závislosti od parametra $a \in [0, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}n}{a^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a.$$

Uvedený rad obsahuje len nezáporné členy, a preto podľa podielového kritéria konverguje pre $a \in [0, 1)$ a diverguje pre $a \in (1, \infty)$. V prípade $a = 1$ sa jedná o harmonický rad, o ktorom vieme, že diverguje. ✈

Príklad 10 (podielové kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!},$$

v závislosti od parametra $a \in [0, \infty)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^a}{(n+1)!}}{\frac{n^a}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a n!}{n^a(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1.\end{aligned}$$

Uvedený rad obsahuje len nezáporné členy, a preto podľa podielového kritéria konverguje pre každé $a \in [0, \infty)$. ✈

Príklad 11 (odmocninové kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\arctan n}\right)^n$$

v závislosti od parametra $a \in [0, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{\arctan n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\arctan n} = \frac{2a}{\pi}.$$

Podľa odmocninového kritéria rad konverguje pre $a \in [0, \frac{\pi}{2})$ a diverguje pre $a \in (\frac{\pi}{2}, \infty)$. Pozrime sa na nutnú podmienku konvergencie v prípade $a = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{\arctan n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\log\left(\frac{a}{\arctan n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \log\left(\frac{a}{\arctan n}\right)\right)$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{a}{\arctan n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{a}{\arctan n}\right)}{\frac{1}{n}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\arctan n}{a}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow[\left|\frac{0}{0}\right|]{\text{l'Hosp.}} -\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{\arctan n} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\arctan n(1+n^2)} = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}} \neq 0,$$

čo znamená, že uvedený rad pre $a = \frac{\pi}{2}$ diverguje. ✈

Príklad 12 (odmocninové kritérium)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log n}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{\log n}\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\log\left(\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\sin\frac{1}{n}}{\log n} \underset{\left|\frac{-\infty}{\infty}\right|}{\xrightarrow{\text{l'Hosp.}}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\cos\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-\cos\frac{1}{n}}{n\sin\frac{1}{n}} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{\left|\frac{0}{0}\right|}{\xrightarrow{\text{l'Hosp.}}} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = 1\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{e} < 1,
\end{aligned}$$

čo znamená, že podľa odmocninového kritéria uvedený rad konverguje. ✈

Príklad 13 (alternujúci rad)**.** Rozhodnite o konvergencii radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\log n}.$$

V prípade, že konverguje, odhadnite chybu pri aproximácii súčtom prvých 99 členov.

Jedná sa o alternujúci rad, čo znamená, že nutná podmienka konvergencie je zároveň aj postačujúcou podmienkou:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{1-\frac{\log n}{n}} = 0,$$

a preto rad konverguje. Platí nasledujúci odhad:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\log n} - s_{99}\right| < |a_{100}| = \frac{1}{100-\log 100} \approx 0{,}01048274840418150929127966309189.$$ ✈

Príklad 14 ((ne)absolútna konvergencia)**.** Rozhodnite, či rad

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n}{6^n}$$

konverguje absolútne, relatívne, alebo diverguje.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{6^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sin n|}{6^n} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5} < \infty.$$

Podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{6^n}\right|$ konverguje, čo implikuje aj konvergenciu pôvodného radu. Rad $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n}{6^n}$ konverguje absolútne. ✈

Príklad 15 ((ne)absolútna konvergencia)**.** Rozhodnite, či rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{n}$$

konverguje absolútne, relatívne, alebo diverguje.

Jedná sa o alternujúci rad, takže stačí overiť nutnú podmienku konvergencie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{n} = 0,$$

čo znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{n}$ konverguje. Na druhej strane

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \tan\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,$$

takže podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \tan\frac{1}{n}\right|$ diverguje. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tan\frac{1}{n}$ konverguje relatívne, neabsolútne. ✈

Príklad 16. Vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos\frac{1}{n}}{n(n+2)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos\frac{1}{n}}{n(n+2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} = \infty,$$

takže rad diverguje. ✈

Príklad 17. Vyšetrite konvergenciu radu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^4+2n^2+1} \leq 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^4} = 4+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{<\infty}+4\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}_{<\infty}+4\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}_{<\infty},$$

takže pôvodný rad konverguje. ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr, HASILOVÁ, Kamila a ŠIŠOLÁKOVÁ, Jiřina. *Sbírka příkladů o nekonečných řadách*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js20/nekonecne_rady/web/index.html`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana a NOVÁK, Vítězslav. *Nekonečné řady*