MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 12. cvičenie, 13.1.2021

Mocninné rady

Príklad 1 (obor konvergencie)**.** Určte interval konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Pre polomer konvergencie R platí

$$R = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a \in \mathbb{R}, \\ 0, & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \infty, & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Počítajme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Takže polomer konvergencie je 1 a rad určite konverguje pre $x \in (-1, 1)$. V prípadoch $x = \pm 1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie, takže obor konvergencie je $(-1, 1)$. ✈

Príklad 2 (obor konvergencie)**.** Určte interval konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}.$$

Vieme, že ak existuje limita $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, potom existuje aj limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ a sú si navzájom rovné. Pozrieme sa teda na prvú z nich:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)3^n}}{\frac{1}{n3^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n3^{n-1}}{(n+1)3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+3} = \frac{1}{3}.$$

Takže polomer konvergencie je 3 a rad určite konverguje pre $x \in (-3, 3)$. Vyšetrime krajné body intervalu. Pre $x = -3$ sa jedná o konvergentný Leibnizov rad. Pre $x = 3$ máme dočinenia s divergentným harmonickým radom. Obor konvergencie je preto $[-3, 3)$. ✈

Príklad 3 (obor konvergencie)**.** Určte interval konvergencie radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}.$$

Uvedomme si, že koeficienty tohto mocninného radu sú dané nasledujúcim predpisom:

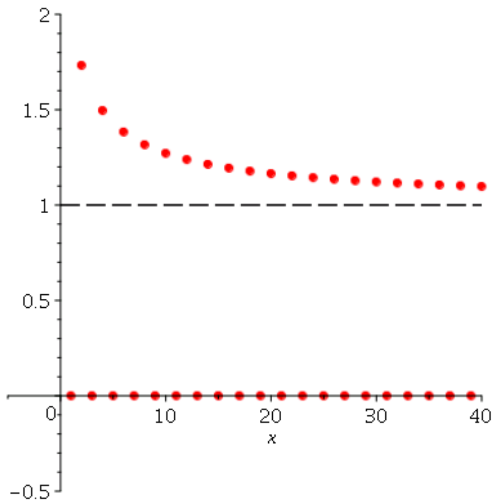
$$a_n = \begin{cases} (-1)^k (2k+1), & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vyšetríme limitu podpostupnosti $\{\sqrt[2k]{|a_{2k}|}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (2k+1)^{\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2k} \log(2k+1)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{k\to\infty} \frac{\log(2k+1)}{2k}\right) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Postupnosť $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ sa skladá z dvoch podpostupností $\{\sqrt[2k]{|a_{2k}|}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|}\}_{k=1}^{\infty}$, z ktorých má jedna limitu 1 a druhá má limitu 0. To znamená, že limita postupnosti $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ neexistuje. To nám nevadí, pretože vieme, že predpoklad o existencii tejto limity je príliš silný a k výpočtu polomeru konvergencie nám stačí spočítať $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, čo je najväčšia limitná hodnota konvergentných podpostupností postupnosti $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$. Tou je zrejme číslo 1.



Polomer konvergencie je preto $R = \frac{1}{1} = 1$, čo znamená, že daný mocninný rad určite konverguje pre $x \in (-1,1)$. Pre $x = \pm 1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie. Obor konvergencie mocninného radu je preto $(-1,1)$. ✈

Príklad 4 (súčet)**.** Vypočítajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

Využijeme možnosť zámeny sumácie a integrácie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^{4n-1}}{4n-1}\right]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x t^{4n-2}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}\right) \mathrm{d}t.$$

Rad v zátvorke je geometrický s qvocientom $q = t^4$ a počiatočným sčítancom t^2. Ďalej predpokladajme $|t^4| < 1$, teda $-1 < t < 1$.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n-2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Ďalej uskutočníme rozklad na parciálne zlomky:

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$
$$t^2 = A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1+t)(1-t).$$

Po dosadení $t = 1$ a $t = -1$ dostaneme $A = \frac{1}{4}$ a $B = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} 4t^2 &= 2 + 2t^2 + 4(Ct+D)(1+t)(1-t) \\ -2(1-t^2) &= 4(Ct+D)(1+t)(1-t) \\ -2 &= 4Ct + 4D \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C &= 0, \\ D &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Môžeme pokračovať:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\arctan x.$$ ✈

Príklad 5 (súčet)**.** Vypočítajte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{5^{2n}}.$$

Uvažujme mocninný rad $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$. Ak za x dosadíme $\frac{1}{5}$ dostaneme číselný rad, ktorého súčet máme nájsť. Overme, či číslo $\frac{1}{5}$ patrí do oboru konvergencie tohto mocninného radu. V príklade 3 sme zistili, že obor konvergencie tohto radu je interval $(-1,1)$ a číslo $\frac{1}{5}$ do neho zrejme patrí. Môžeme sa pustiť do sčítavania:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{2n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' \\ &= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Pre $x=\frac{1}{5}$ dostávame

$$\frac{1-(\frac{1}{5})^2}{(1+(\frac{1}{5})^2)^2} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{26^2}{25^2}} = \frac{24\cdot 25^2}{25\cdot 26^2} = \frac{25\cdot 6}{13\cdot 13} = \frac{150}{169}.$$ ✈

Príklad 6 (súčet)**.** Vypočítajte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}x^n.$$

Začneme geometrickým radom:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \Big/ \int$$

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) + c = \int\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Dosadením $x=0$ zistíme, že $c=0$. Môžeme pokračovať:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \qquad /\cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1} = -x\log(1-x) \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+2}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}x^{n+1} = -\log(1-x) + \frac{x}{1-x} = (-x\log(1-x))'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ je 1. Všetky použité úpravy zachovávajú polomer konvergencie, takže aj polomer konvergencie radu zo zadania je 1. Pre $x=\pm 1$ nie je splnená nutná podmienka konvergencie, takže obor konvergencie je $(-1,1)$. ✈

Príklad 7 (súčet)**.** Vypočítajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

Opäť začneme geometrickým radom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \Big/ \int$$

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int (-1)^{n-1} x^{2n-2} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x + c.$$

Dosadením $x = 0$ zistíme, že $c = 0$. Pokračujme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = \arctan x \qquad \Big/ \int$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)} = \int \arctan x \, \mathrm{d}x \, \left| \begin{matrix} u = \arctan x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right|$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Opäť po dosadení $x = 0$ zistíme, že $c = 0$. Po vynásobení tejto rovnice číslom 2 sa dostaneme k želanému výsledku:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x \arctan x - \log(1+x^2).$$

Žiadna z úprav nezmenila pôvodný polomer konvergencie $R = 1$. Pre $x = \pm 1$ je uvedený rad alternujúci a navyše spĺňa nutnú podmienku konvergencie, takže konverguje pre každé $x \in [-1, 1]$. ✈

Príklad 8. Rozviňte funkciu $f(x) = \sqrt{x}$ do Taylorovho radu so stredom v bode $x_0 = 1$. Nájdite obor konvergencie tohto radu.

V cvičení 4 sme odvodili vzorec pre výpočet n-tej derivácie funkcie $f(x) = \sqrt{x}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (2n-3)!! \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Taylorov rad funkcie $f(x)$ so stredom v bode $x_0 = 1$ má preto nasledujúci tvar:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{n!}(x-1)^n.$$

Pozrime sa na polomer konvergencie:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{2(n+1)(2n-3)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2(n+1)} = 1.$$

Takže rad určite konverguje pre $x \in (0,2)$. Pre $x = 2$ je to alternujúci rad spĺňajúci nutnú podmienku konvergencie:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{2n}\cdot \underbrace{\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\cdots\frac{1}{2}}_{\leq 1} = 0,$$

kde sme použili vetu o troch limitách:

$$0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n} \leq \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Podľa limitného Raabeovho kritéria rad tiež konverguje pre $x = 0$. Obor konvergencie Taylorovho radu je preto $[0,2]$. ✈

Príklad 9. S presnosťou 10^{-4} určte $\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

Použijeme Taylorove rady. Pripomeňme, že funkcia sínus sa dá na celom svojom definičnom obore rozvinúť do svojho Taylorovho radu:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Taylorov rad funkcie $\sin(x^2)$ má preto tvar

$$T(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

Dá sa ukázať, že v každom bode $x \in \mathbb{R}$ platí $T(x) = \sin(x^2)$. Integrujme:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{4n+2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{4n+2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} t^{4n+3}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}.\end{aligned}$$

Uvedený rad je alternujúci a pre chybu aproximácie n-tým čiastočným súčtom máme horný odhad:

$$\left|\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t - s_n\right| < |a_{n+1}|.$$

Potrebujeme preto nájsť n, pre ktoré platí $|a_{n+1}| < 10^{-4}$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2n+3)!(4n+7)} < 10^{-4} \\ (2n+3)!(4n+7) > 10^4\end{gathered}$$

Zrejme prvé n, pre ktoré táto rovnosť platí je $n = 2$. Určme teda približnú hodnotu integrálu:

$$\int_0^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{120\cdot 11} = \frac{13\cdot 20\cdot 11 + 7}{7\cdot 120\cdot 11} = 0{,}310\overline{281385}.$$

Presná hodnota je približne $0{,}310268$. Funkcia $S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ sa nazýva Fresnelov integrál a okrem iného sa používa napríklad pri stavbe ciest a železníc. ✈

Príklad 10. Nájdite súčet radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx(1-x)^n \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2x(1-x)^n,$$

kde $x \in [0,1]$.

Súčty obidvoch radov sú nulové pre $x \in \{0,1\}$, takže stačí uvažovať prípad $x \in (0,1)$. Začneme prvým z nich:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n &= \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} && /' \\
\sum_{n=0}^{\infty}-n(1-x)^{n-1} &= -\frac{1}{x^2} && /\cdot(-1) \\
\sum_{n=0}^{\infty}n(1-x)^{n-1} &= \frac{1}{x^2} && /\cdot x(1-x) \\
\sum_{n=0}^{\infty}nx(1-x)^{n} &= \frac{1-x}{x}.
\end{aligned}$$

Pre druhý rad sú výpočty podobné. Budeme pokračovať tretím riadkom predošlého výpočtu:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}n(1-x)^{n-1} &= \frac{1}{x^2} && /\cdot(1-x) \\
\sum_{n=0}^{\infty}n(1-x)^{n} &= \frac{1-x}{x^2} && /' \\
-\sum_{n=0}^{\infty}n^2(1-x)^{n-1} &= \frac{-x^2-(1-x)2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3} && /\cdot(-1) \\
\sum_{n=0}^{\infty}n^2(1-x)^{n-1} &= \frac{2-x}{x^3} && /\cdot x(1-x) \\
\sum_{n=0}^{\infty}n^2x(1-x)^{n} &= \frac{(2-x)(1-x)}{x^2} = \frac{x^2-3x+2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Vypočítali ste prvý a druhý všeobecný moment náhodnej veličiny s geometrickým rozdelením.

✈

Príklad 11. Pomocou mocninných radov vyriešte rovnicu $y'' + ay' + by = 0$ popisujúcu okrem iného pohyb tlmeného kyvadla.

Diferenciálnu rovnicu $y'' + ay' + by = 0$ nahradíme ekvivalentným systémom dvoch rovníc prvého rádu:

$$y' = z, \qquad z' = -az - by.$$

V skutočnosti sme len zaviedli substitúciu $z = y'$. Prívlastok ekvivalentný vyjadruje nasledujúcu vlastnosť. Prvá zložka každého riešenia (y,z) nového systému určuje riešenie pôvodnej rovnice a naopak každé riešenie y pôvodnej rovnice určuje riešenie (y,y') nového systému.

Predpokladajme, že riešenie (y,z) sa dá rozvinúť do mocninného radu:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Keďže platí

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n, \qquad z' = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(n+1)x^n,$$

musia byť splnené nasledujúce rovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(n+1)x^n = -a\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách dostaneme rovnosti

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}, \qquad b_{n+1} = \frac{-ab_n - ba_n}{n+1},$$

ktoré môžeme napísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n+1} \\ -\frac{b}{n+1} & -\frac{a}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Hodnoty (a_n, b_n) môžeme vyjadriť v závislosti od počiatočných hodnôt (a_0, b_0):

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Potrebujeme nájsť prvky matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} i_n & j_n \\ k_n & l_n \end{pmatrix}.$$

Zrejme platí

$$\begin{pmatrix} i_{n+1} & j_{n+1} \\ k_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n & j_n \\ k_n & l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & l_n \\ -bi_n - ak_n & -bj_n - al_n \end{pmatrix},$$

takže

$$\begin{aligned} i_{n+1} &= k_n, \quad k_{n+1} = -bi_n - ak_n = -ak_n - bk_{n-1}, \\ j_{n+1} &= l_n, \quad l_{n+1} = -bj_n - al_n = -al_n - bl_{n-1}, \end{aligned}$$

Postupnosti $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ sú riešením lineárnej rekurencie druhého rádu s konštantnými koeficientami. Vieme, že jej riešenie môžeme vyjadriť pomocou koreňov λ_1 a λ_2 charakteristického polynómu $\lambda^2 + a\lambda + b$. Výpočet ďalej rozdelíme na dva prípady podľa charakteru týchto koreňov.

Korene λ_1 a λ_2 sú rôzne. V takom prípade má n-tý člen postupnosti, ktorá je riešením spomínanej rekurencie tvar $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, kde konštanty c_1 a c_2 sú určené počiatočnou podmienkou. Tá má v našom prípade nasledujúci tvar:

$$\begin{pmatrix} i_0 & j_0 \\ k_0 & l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ k_1 & l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Zdôraznime, že platí $a = -\lambda_1 - \lambda_2$ a $b = \lambda_1\lambda_2$. Po dopočítaní týchto konštánt nájdeme hľadané štyri postupnosti:

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^n - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n, & j_n &= -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^n + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n, \\ k_n &= \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^n - \frac{b}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n, & l_n &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1^n + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^n. \end{aligned}$$

Preto platí

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} i_n & j_n \\ k_n & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ b & -\lambda_1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -b & \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Pre a_n dostávame

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} (a_0\lambda_2 - b_0) + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} (-a_0\lambda_1 + b_0) \right),$$

čo nás konečne priviedlo k riešeniu $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0\lambda_2 - b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n x^n}{n!} + \frac{-a_0\lambda_1 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n x^n}{n!} \\ &= \frac{a_0\lambda_2 - b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 x) + \frac{-a_0\lambda_1 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Ak λ_1 a λ_2 sú reálne korene, sme hotoví. V opačnom prípade sa jedná o dvojicu komplexne združených koreňov. Označme $\lambda_1 = c + id$ a $\lambda_2 = c - id$. Ukážme, že uvedený predpis aj tak zadáva reálne riešenie:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{a_0\lambda_2 - b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_1 x) + \frac{-a_0\lambda_1 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 x) \\ &= \frac{a_0\lambda_2 - b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathrm{e}^{cx}(\cos(dx) + i\sin(dx))) + \frac{-a_0\lambda_1 + b_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathrm{e}^{cx}(\cos(dx) - i\sin(dx)) \\ &= \mathrm{e}^{cx}\cos(dx) \frac{a_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \mathrm{e}^{cx} i \sin(dx) \frac{-2b_0 + a_0(\lambda_2 + \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= a_0 \mathrm{e}^{cx}\cos(dx) + \frac{b_0 - ca_0}{d} \mathrm{e}^{cx}\sin(dx). \end{aligned}$$

Pri úpravách sme použili Eulerov vzorec $\mathrm{e}^{idx} = \cos(dx) + i\sin(dx)$.

Rovnica má jeden dvojnásobný koreň λ. Ak $\lambda = 0$, potom má diferenciálna rovnica tvar $y'' = 0$. Jej riešením je potom akýkoľvek polynóm stupňa nanajvýš jeden. Ďalej preto predpokladajme $\lambda \neq 0$. V takom prípade má n-tý člen postupnosti, ktorá je riešením spomínanej rekurencie tvar $c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n$, kde konštanty c_1 a c_2 sú určené počiatočnou podmienkou. Po dopočítaní týchto konštánt nájdeme hľadané štyri postupnosti:

$$\begin{aligned} i_n &= (1-n)\lambda^n, & j_n &= n\lambda^{n-1}, \\ k_n &= -bn\lambda^{n-1}, & l_n &= \lambda^n - \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) n\lambda^n. \end{aligned}$$

Preto platí

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} i_n & j_n \\ k_n & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (1-n)\lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ -bn\lambda^{n-1} & \lambda^n - \left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) n\lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Pre a_n dostávame

$$a_n = \frac{1}{n!} \left((1-n)\lambda^n a_0 + n\lambda^{n-1} b_0 \right) = \frac{1}{n!} \left(\lambda^n a_0 - n\lambda^n a_0 + n\lambda^{n-1} b_0 \right),$$

čo nás opäť priviedlo k riešeniu $y(x)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!} - a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{(n-1)!} + b_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} x^n}{(n-1)!} \\ &= a_0 \exp(\lambda x) - a_0 \lambda x \exp(\lambda x) + b_0 x \exp(\lambda x) = a_0 \exp(\lambda x) + (b_0 - a_0\lambda) x \exp(\lambda x). \end{aligned}$$ ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr, HASILOVÁ, Kamila a ŠIŠOLÁKOVÁ, Jiřina. *Sbírka příkladů o nekonečných řadách*, https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js20/nekonecne_rady/web/index.html

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf

[3] DOŠLÁ, Zuzana a NOVÁK, Vítězslav. *Nekonečné řady*