MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 2. cvičenie, 14.10.2020

Derivácia funkcie

Na začiatok uvedieme a pripomenieme niektoré pravidlá pre počítanie s deriváciami, aby sme sa na ne mohli odvolávať. Všetky môžu byť dohľadané v [1], [2] alebo [3].

Veta 1. *Nech majú funkcie $f(x)$ a $g(x)$ vlastnú deriváciu v bode x a nech $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom platia nasledujúce rovnosti:*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \tag{1}$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \tag{2}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \tag{3}$$

$$\textit{Ak } g(x) \neq 0, \textit{ tak tiež } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{4}$$

Veta 2. *Nech má funkcia g vlastnú deriváciu v bode x_0 a nech má funkcia f vlastnú deriváciu v bode $g(x_0)$. Potom má deriváciu v bode x_0 aj zložená funkcia $f \circ g$ a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{5}$$

Veta 3. *Ak je funkcia f spojitá a rýdzo monotónna na intervale J a ak je $y_0 \in J$ vnútorný bod tohto intervalu taký, že f má v y_0 deriváciu, potom má inverzná funkcia f^{-1} deriváciu v bode $x_0 = f(y_0)$ a platí nasledujúce:*

- *Ak $f'(y_0) \neq 0$, potom* $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f(y_0))}$.
- *Ak $f'(y_0) = 0$, potom* $(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \infty & \textit{pre } f \textit{ rastúcu} \\ -\infty & \textit{pre } f \textit{ klesajúcu} \end{cases}$

Veta 4. *Nech $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platia nasledujúce rovnosti:*

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \tag{6}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{7}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{8}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}, \tag{9}$$

$$(\cot x)' = \frac{1}{-(\sin x)^2}, \tag{10}$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \tag{11}$$

$$(a^x)' = \log a \cdot a^x, \tag{12}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \tag{13}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \log a}, \tag{14}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{15}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{16}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \tag{17}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{18}$$

Posledná veta nám dáva návod na výpočet derivácií elementárnych funkcií. Podľa vety 1 vieme derivovať výrazy, ktoré vznikli aplikáciou základných aritmetických operácií a nakoniec veta 2 hovorí, ako derivovať zloženú funkciu. To znamená, že vďaka týmto pravidlám sme schopný zderivovať akúkoľvek funkciu, ktorá vznikne aplikáciou konečného počtu základných aritmetických operácií a elementárnych funkcií na elementárne funkcie. Všeobecný postup pri derivovaní funkcií je nasledujúci. Najprv identifikujeme všetky operácie, ktoré skonštruovali daný výraz. Potom na základe uvedených pravidiel budeme tieto operácie derivovať od poslednej použitej k prvej použitej, až kým sa nezbavíme všetkých operátorov derivovania. Výsledný výraz zjednodušíme. Ukážeme si to na konkrétnych príkladoch.

Príklad 5. Zderivujte funkciu

$$\frac{1}{(x+3)^4}.$$

Máme dve možnosti ako postupovať. V každom prípade je funkcia $f(x) = (x+3)^4$ zložením funkcií $f = a \circ b$, kde $a(x) = x^4$ a $b(x) = x + 3$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(x+3)^4}\right)' &= \frac{1' \cdot (x+3)^4 - 1 \cdot ((x+3)^4)'}{(x+3)^8} && (4)\\
&= \frac{0 \cdot (x+3)^4 - 1 \cdot 4(x+3)^3(x+3)'}{(x+3)^8} && (1' = 0 \text{ a veta } 2)\\
&= \frac{-1 \cdot 4(x+3)^3(x' + 3')}{(x+3)^8} && (2)\\
&= \frac{-1 \cdot 4(x+3)^3(1+0)}{(x+3)^8} && ((6) \text{ a } 3' = 0)\\
&= \frac{-4(x+3)^3}{(x+3)^8} = \frac{-4}{(x+3)^5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(x+3)^4}\right)' &= \left((x+3)^{-4}\right)' = -4 \cdot (x+3)^{-5} \cdot (x+3)' && (\text{veta } 2)\\
&= -4 \cdot (x+3)^{-5} \cdot (x' + 3') && (2)\\
&= -4 \cdot (x+3)^{-5} \cdot (1+0) && ((6) \text{ a } 3' = 0)\\
&= \frac{-4}{(x+3)^5}.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 6. Zderivujte funkciu

$$5x^3 + 4\sqrt[3]{x} + \log(x^2+1) - \arctan x.$$

Uvedomme si, že $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, takže pri derivovaní tejto funkcie môžeme použiť pravidlo (6). Funkcia $f(x) = \log(x^2+1)$ je zložením funkcií, konkrétne $f = a \circ b$, kde $a(x) = \log(x)$ a $b(x) = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
&(5x^3 + 4\sqrt[3]{x} + \log(x^2+1) - \arctan x)'\\
&\quad = (5x^3)' + (4\sqrt[3]{x})' + (\log(x^2+1))' - (\arctan x)' && (2)\\
&\quad = 5(x^3)' + 4(\sqrt[3]{x})' + \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{a'(b(x))} \cdot \underbrace{(x^2+1)'}_{b'(x)} - \frac{1}{1+x^2} && ((1), \text{ veta 2 a } (17))\\
&\quad = 5 \cdot 3x^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x^2+1} \cdot ((x^2)' + 1') - \frac{1}{1+x^2} && ((6) \text{ a } (2))\\
&\quad = 15x^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x - \frac{1}{1+x^2} && ((6) \text{ a } 1' = 0)\\
&\quad = 15x^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} + \frac{2x-1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 7. Zderivujte funkciu
$$\frac{\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' &= \left(\frac{x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \frac{\left(x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{5}{3}}\right)' x^{\frac{3}{4}} - \left(x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{5}{3}}\right)\left(x^{\frac{3}{4}}\right)'}{x^{\frac{6}{4}}} && (4)\\
&= \frac{\left(\frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\right) x^{\frac{3}{4}} - \left(x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{5}{3}}\right)\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{2}}} && ((2)\text{ a }(6))\\
&= \frac{\frac{4}{7}x^{\frac{9}{28}}-\frac{5}{3}x^{\frac{17}{12}}-\frac{3}{4}x^{\frac{9}{28}}+\frac{3}{4}x^{\frac{17}{12}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{11}{12}x^{\frac{17}{12}}-\frac{5}{28}x^{\frac{9}{28}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-77x^{\frac{23}{21}}-15}{84x^{\frac{33}{28}}}.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 8. Zderivujte funkciu
$$\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2}.$$

Posledná aplikovaná operácia je súčin funkcií $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}$ a $g(x)=\frac{-x^2}{(1+x)^2}$. Funkcia f vznikla zložením funkcií $h(x)=\mathrm{e}^x$ a $k(x)=\frac{x}{1+x}$ takto: $f=h\circ k$. Funkcie g a k sú podiely polynómov. Počítajme:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2}\right)'}_{(3)} = \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\right)'}_{\text{veta 2}}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\underbrace{\left(\frac{-x^2}{(1+x)^2}\right)'}_{(4)}\\
&= \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}}_{h'(k(x))}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}_{k'(x)}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{\overbrace{(-x^2)'}^{(1)\text{ a }(6)}(1+x)^2-(-x^2)\overbrace{((1+x)^2)'}^{\text{veta 2: }(1+x)^2=(a\circ b)(x),\text{ kde }a(x)=x^2,\,b(x)=1+x}}{(1+x)^4}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{\overbrace{x'}^{=1,\text{ podľa }(6)}(1+x)-x\overbrace{(1+x)'}^{=1,\text{ podľa }(6)\text{ a }(2)}}{(1+x)^2}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{-2x(1+x)^2-(-x^2)2(1+x)\cdot\overbrace{(1+x)'}^{=1,\text{ podľa }(6)\text{ a }(2)}}{(1+x)^4}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{-2x(1+x)^2-(-x^2)2(1+x)}{(1+x)^4}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{-x^2}{(1+x)^4} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}\frac{-2x}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

✈

Príklad 9. Zderivujte funkciu

$$\sin(\cos^2(\arctan(x^3-2x))).$$

Označme postupne nasledujúce funkcie: $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\cos(x)$, $i(x)=\arctan x$ a $j(x)=x^3-2x$. Použitím indukcie sa dá pravidlo (5) vo vete 2 rozšíriť na zloženie ľubovoľného konečného počtu funkcií. V prípade piatich funkcií má toto pravidlo nasledujúci tvar:

$$(f\circ g\circ h\circ i\circ j)'(x) = f'(g(h(i(j(x)))))\cdot g'(h(i(j(x))))\cdot h'(i(j(x)))\cdot i'(j(x))\cdot j'(x)$$

Použijúc pravidlá (7), (6), (8), (17), (2) a (1) dostaneme

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(x) = 2x, \quad h'(x) = -\sin x, \quad i'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad j'(x) = 3x^2 - 2.$$

Takže po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned}(\sin(\cos^2(\arctan(x^3-2x))))' &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot 2\cos(\arctan(x^3-2x)) \\ &\quad \cdot (-\sin(\arctan(x^3-2x))) \cdot \frac{1}{1+(x^3-2x)^2} \cdot (3x^2-2).\end{aligned}$$

Výpočet tejto derivácie sme tiež mohli uskutočniť postupnou aplikáciu vety 2:

$$\begin{aligned}(\underbrace{\sin(\cos^2(\arctan(x^3-2x)))}_{\boxed{=(f\circ g)(x),\text{ kde } f(x)=\sin x,\, g(x)=\cos^2(\arctan(x^3-2x))}})' &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot (\underbrace{\cos^2(\arctan(x^3-2x))}_{\boxed{=(f\circ g)(x),\text{ kde } f(x)=x^2,\, g(x)=\cos(\arctan(x^3-2x))}})' \\ &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot 2\cos(\arctan(x^3-2x)) \cdot (\underbrace{\cos(\arctan(x^3-2x))}_{\boxed{=(f\circ g)(x),\text{ kde } f(x)=\cos x,\, g(x)=\arctan(x^3-2x)}})' \\ &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot 2\cos(\arctan(x^3-2x)) \cdot (-\sin(\arctan(x^3-2x))) \\ &\quad \cdot (\underbrace{\arctan(x^3-2x)}_{\boxed{=(f\circ g)(x),\text{ kde } f(x)=\arctan x,\, g(x)=x^3-2x}})' \\ &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot 2\cos(\arctan(x^3-2x)) \\ &\quad \cdot (-\sin(\arctan(x^3-2x))) \cdot \frac{1}{1+(x^3-2x)^2} \cdot (x^3-2x)' \\ &= \cos(\cos^2(\arctan(x^3-2x))) \cdot 2\cos(\arctan(x^3-2x)) \\ &\quad \cdot (-\sin(\arctan(x^3-2x))) \cdot \frac{1}{1+(x^3-2x)^2} \cdot (3x^2-2).\end{aligned}$$

✈

Príklad 10. Zderivujte funkciu

$$(x^2+1)^{\arcsin x}.$$

V tomto prípade uvažovanú funkciu nie sme schopní napísať ako zloženie dvoch funkcií. Opäť si pomôžeme vzťahom $A = \mathrm{e}^{\log A}$, kde $A > 0$:

$$\begin{aligned}\left((x^2+1)^{\arcsin x}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{\log(x^2+1)^{\arcsin x}}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\arcsin x \cdot \log(x^2+1)}\right)' \\ &= \mathrm{e}^{\arcsin x \cdot \log(x^2+1)} \cdot \left(\arcsin x \cdot \log(x^2+1)\right)' && \text{(veta 2)} \\ &= (x^2+1)^{\arcsin x} \cdot \left((\arcsin x)' \cdot \log(x^2+1) + \arcsin x \cdot (\log(x^2+1))'\right) && (3) \\ &= (x^2+1)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x^2+1} \cdot (x^2+1)'\right) && \text{((15), veta 2 a (13))} \\ &= (x^2+1)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x\arcsin x}{x^2+1} \cdot\right). && \text{((2) a (6))}\end{aligned}$$

✈

l'Hospitalovo pravidlo

Veta 11. *Nech $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a nech je limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ak existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ potom tiež existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Rovnaké tvrdenie platí aj pre jednostranné limity.

Pomocou l'Hospitalovho pravidla môžeme po vhodnej úprave vyšetrovanej funkcie počítať aj limity typu $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 a 1^∞. Ak $f(x) \to \infty$ a $g(x) \to \infty$ pre $x \to x_0$, potom

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

čo je limita typu $\frac{0}{0}$. Podobne, ak $f(x) \to 0$ a $g(x) \to \infty$ pre $x \to x_0$, potom

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

čo je opäť limita typu $\frac{0}{0}$. Výrazy 0^0, ∞^0 a 1^∞ sa upravia nasledujúcim spôsobom:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)\cdot\log f(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0}(g(x)\cdot\log f(x))}.$$

Detaily sú uvedené v [3].

Príklad 12. Ukážte, že ľubovoľný polynóm $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ pre $x \to \infty$ rastie pomalšie ako funkcia e^x.

Úlohu zo zadania môžeme formulovať ako dôkaz platnosti nasledujúcej rovnosti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Aplikujme na túto limitu n-krát l'Hospitalovo pravidlo:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{\mathrm{e}^x}} \xrightarrow[\frac{\infty}{\infty}]{\text{l'Hosp.}} \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1}{\mathrm{e}^x}} \xrightarrow[\frac{\infty}{\infty}]{\text{l'Hosp.}} \cdots \xrightarrow[\frac{\infty}{\infty}]{\text{l'Hosp.}} \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{n! a_n}{\mathrm{e}^x} = 0}$$

Keďže posledná limita existuje, existujú aj všetky limity pred ňou a ich hodnota je rovnaká. Špeciálne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

✈

Príklad 13. Spočítajte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log(x)}.$$

Riešenie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log(x)} \xrightarrow[\frac{\infty}{\infty}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Keďže limita podielu derivácií existuje, existuje aj pôvodná limita a je rovná ∞. ✈

Príklad 14. Vypočítajte jednostrannú limitu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\cot x}.$$

Opäť použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\cot x} \xrightarrow[\frac{-\infty}{\infty}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\sin(x)\cdot\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\sin(x)\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

✈

Príklad 15. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Limitu upravíme na typ $\frac{0}{0}$ a potom použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\log x}{\log x(x-1)}\right) \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\log x}\right)$$
$$\xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}.$$

✈

Príklad 16. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left((1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}\right).$$

Najprv si daný výraz upravíme pomocou exponenciály:

$$\lim_{x\to 0}\left((1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\cot^2 x\cdot\log(1+3\tan^2 x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}(\cot^2 x\cdot\log(1+3\tan^2 x))}$$

Vyšetríme limitu v exponente:

$$\lim_{x\to 0}(\cot^2 x\cdot\log(1+3\tan^2 x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3\tan^2 x)}{\frac{1}{\cot^2 x}} \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\tan x}{(1+3\tan^2 x)\cos^2 x}}{\frac{2}{\cot^3 x\cdot\sin^2 x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{(1+2\sin^2 x)} = 3.$$

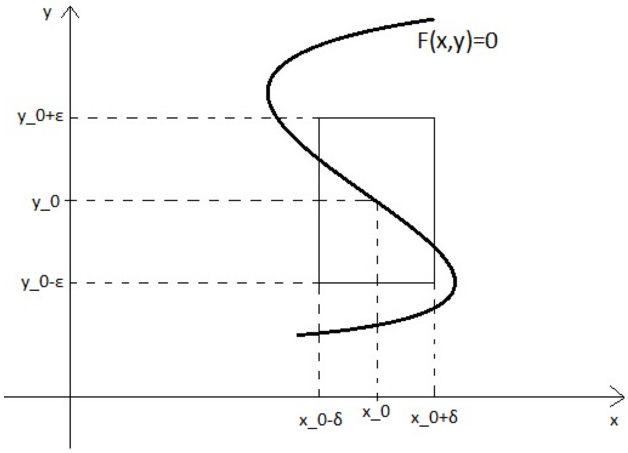
Takže v konečnom dôsledku platí

$$\lim_{x\to 0}\left((1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}\right) = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}(\cot^2 x\cdot\log(1+3\tan^2 x))} = \mathrm{e}^3.$$

✈

Derivácia implicitne zadanej funkcie

Zápis $y = f(x)$ nazývame explicitným zadaním funkcie f. Uvažujme rovnicu $F(x, y) = 0$, kde F je funkcia alebo výraz v premenných x a y. Jej riešením je vo všeobecnosti krivka v rovine. Predpokladajme, že bod (x_0, y_0) spĺňa $F(x_0, y_0) = 0$. Ak existuje okolie $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ bodu (x_0, y_0) také, že pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje práve jedno $y = f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ spĺňajúce $F(x, f(x)) = 0$, potom povieme, že rovnica $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0) implicitne zadáva funkciu f.



Nie vždy sme schopní v takejto situácii nájsť explicitný predpis funkcie f, čo v praxi znamená, že nevieme z rovnice $F(x, y) = 0$ vyjadriť premennú y. Aj napriek tomu vieme vypočítať derivácie tejto funkcie. Použijeme pravidlo o derivovaní zloženej funkcie. Fakt, že bod (x_0, y_0) vyhovuje zadanej rovnici ešte nestačí na to, aby v jeho okolí bola implicitne zadaná nejaká funkcia. Napríklad rovnica $y^2 = x$ v okolí bodu $(0, 0)$ nezadáva žiadnu funkciu, nakreslite si obrázok.

Príklad 17. Vypočítajte deriváciu funkcie zadanej implicitne rovnicou

$$x + \sin(y) = xy.$$

Obidve strany rovnice zderivujeme podľa premennej x majúc na pamäti, že symbol y reprezentuje funkciu $y = f(x)$ v premennej x:

$$\underbrace{(x + \sin(y))'}_{(2)} = x' + \underbrace{(\sin(y))'}_{\text{veta 2}} = 1 + \cos(y) \cdot y',$$

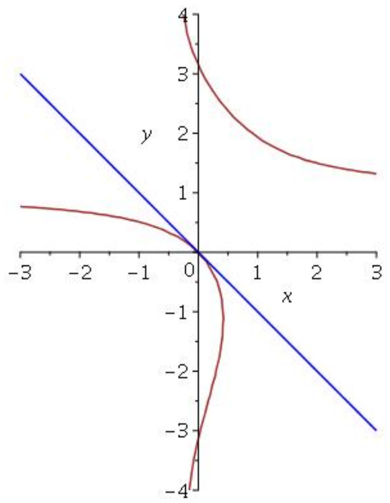
$$\underbrace{(\,xy\,)'}_{(3)} = x'y + xy' = y + xy'.$$

Výsledky porovnáme:

$$1 + \cos(y) \cdot y' = y + xy' \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1 - y}{x - \cos(y)}.$$

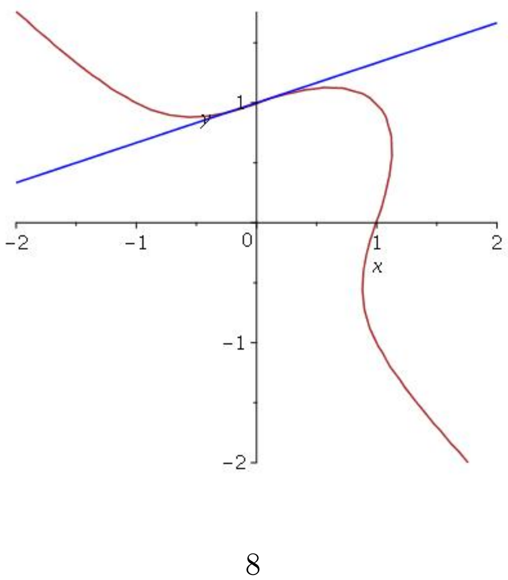
Napríklad bod $(0, 0)$ vyhovuje uvažovanej rovnici a funkcia $f(x)$, ktorá je v okolí bodu $(0, 0)$ touto rovnicou implicitne zadaná, má v bode $x = 0$ deriváciu

$$f'(0) = y'(0) = \frac{1 - y(0)}{0 - \cos(y(0))} = \frac{1 - 0}{0 - \cos(0)} = \frac{1}{-1} = -1.$$



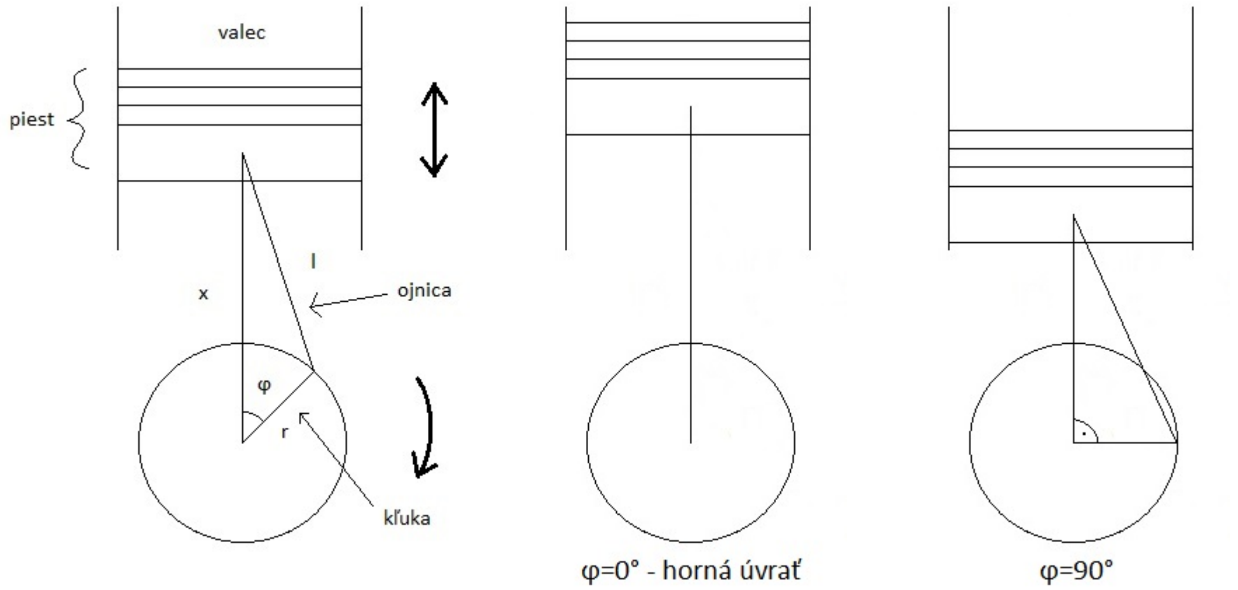
✈

Príklad 18. V bode $(0,1)$ vypočítajte prvú a druhú deriváciu funkcie zadanej implicitne rovnicou
$$x^3 - xy + y^3 - 1 = 0.$$
Budeme postupne derivovať:
$$\underbrace{(x^3 - xy + y^3 - 1)'}_{(2)} = (\underbrace{x^3}_{(6)})' - (\underbrace{xy}_{(3)})' + (\underbrace{y^3}_{\text{veta 2}})' - 1' = 3x^2 - y - xy' + 3y^2y' = 0,$$
$$\underbrace{(3x^2 - y - xy' + 3y^2y')'}_{(2)} = (\underbrace{3x^2}_{(1)\text{ a }(6)})' - y' - (\underbrace{xy'}_{(3)})' + (\underbrace{3y^2y'}_{(3)\text{ a veta 2}})'$$
$$= 6x - y' - y' - xy'' + 6y(y')^2 + 3y^2y'' = 0.$$
Z prvej rovnice vyjadríme y' a z druhej y'':
$$y' = \frac{3x^2 - y}{x - 3y^2}, \qquad y'' = \frac{6x - 2y' + 6y(y')^2}{x - 3y^2}.$$
Za x dosadíme 0 a za y dosadíme 1:
$$y'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 1}{0 - 3 \cdot 1^2} = \frac{1}{3}, \qquad y''(0) = \frac{6 \cdot 0 - 2y'(0) + 6 \cdot 1 \cdot (y'(0))^2}{0 - 3 \cdot 1^2} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{6}{9}}{-3} = 0.$$



Príklad 19. Uvažujme valec spaľovacieho motora. Predpokladajme, že polomer zalomenia kľukového hriadeľa je 5 cm, dĺžka ojnice je 15 cm a nech motor vykonáva rovnomerný pohyb s frekvenciou 3000 otáčok za minútu. Vypočítajte rýchlosť piestu medzi hornou a dolnou úvraťou a jeho zrýchlenie v hornej úvrati.

Označme symbolom r polomer zalomenia kľukového hriadeľa, symbolom l dĺžku ojnice, symbolom x vzdialenosť piestového čapu od osi kľukového hriadeľa a nakoniec symbolom φ uhol kľuky a osi valca v smere hodinových ručičiek. Celá situácia je znázornená na nasledujúcich obrázkoch.



Uhol φ a poloha piestu x sú zrejme funkcie času t. Fakt, že motor vykonáva rovnomerný pohyb znamená, že uhlová rýchlosť kľuky je v čase konštantná. Ak ju označíme symbolom ω, potom môžeme písať $\varphi(t) = \omega t$. Podľa zadania kľuka za jednu sekundu opíše celý kruh päťdesiatkrát, teda od času $t = 0$ do času $t = 1$ uhol φ stúpne z 0 na $50 \cdot 2\pi$, z čoho môžeme dopočítať uhlovú rýchlosť ω:

$$50 \cdot 2\pi = \varphi(1) = \omega \cdot 1 = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 100\pi.$$

Pozrime sa na prvý obrázok. Podľa kosínusovej vety platí nasledujúca rovnosť:

$$l^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\varphi$$

Pokúsme sa z tejto rovnosti vyjadriť polohu piestu x:

$$\begin{aligned}
l^2 &= x^2 + r^2 - 2xr\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi - r^2\cos^2\varphi,\\
l^2 &= r^2 + (x - r\cos\varphi)^2 - r^2(1 - \sin^2\varphi),\\
l^2 - r^2\sin^2\varphi &= (x - r\cos\varphi)^2,\\
\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} &= x - r\cos\varphi,\\
x &= r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.
\end{aligned}$$

Okamžitá rýchlosť piestu je prvá derivácia polohy piestu $x(t)$ podľa času t a zrýchlenie je prvá derivácia okamžitej rýchlosti podľa času t, čiže druhá derivácia polohy piestu podľa času t. Dosaďme $\varphi = \omega t$ a derivujme:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \left(r\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)} \right)' = -r\omega\sin(\omega t) - \frac{r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}} \\
x''(t) &= \left(-r\omega\sin(\omega t) - r^2\omega\frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}} \right)' = -r\omega^2\cos(\omega t) \\
&\quad - r^2\omega\frac{(\omega\cos^2(\omega t) - \omega\sin^2(\omega t))\cdot\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)} - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\frac{-r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}}}{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)} \\
&= -r\omega^2\cos(\omega t) - r^2\omega^2\frac{\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}} - r^4\omega^2\frac{\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t)}{\left(\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Nás zaujíma rýchlosť piestu medzi hornou a dolnou úvraťou, teda hodnota derivácie x' pre $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ a zrýchlenie piestu v hornej úvrati, teda hodnota druhej derivácie x'' pre $\varphi = \omega t = 0$:

$$
x' = -r\omega = 0,05\cdot 100\cdot\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad x'' = -r\omega^2 - \frac{r^2\omega^2}{l} = \left(-500\pi^2 - \frac{25\pi^2}{0,15}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.
$$

Ak má piest, povedzme, hmotnosť 400 gramov, potom sila naň pôsobiaca v hornej úvrati má veľkosť

$$
F = 0,4\,\mathrm{kg}\cdot|x''| \approx 2631\,\mathrm{N}. \tag{19}
$$

✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana. a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*

[4] *Piston motion equations*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Piston_motion_equations`