MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 3. cvičenie, 21.10.2020

Priebeh funkcie

Opäť začneme pripomenutím potrebných tvrdení.

Veta 1. *Nech f má vlastnú deriváciu na otvorenom intervale I.*

- *Ak pre každé $x \in I$ platí $f'(x) > 0$, potom je f na I rastúca.*
- *Ak pre každé $x \in I$ platí $f'(x) < 0$, potom je f na I klesajúca.*

Veta 2. *Funkcia môže mať lokálny extrém len v bodoch $x_0 \in D(f)$, kde f' neexistuje alebo platí $f'(x_0) = 0$.*

Veta 3. *Predpokladajme, že v nejakom rýdzom okolí bodu x_0 existuje vlastná derivácia f' funkcie f. Potom platí*

- *Ak $f'(x) < 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) > 0$ pre $x > x_0$, potom sa v bode x_0 nachádza lokálne minimum.*
- *Ak $f'(x) > 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) < 0$ pre $x > x_0$, potom sa v bode x_0 nachádza lokálne maximum.*
- *Ak $f'(x) > 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) > 0$ pre $x > x_0$, potom sa v bode x_0 nenachádza lokálny extrém a f je v okolí bodu x_0 rastúca.*
- *Ak $f'(x) < 0$ pre $x < x_0$ a $f'(x) < 0$ pre $x > x_0$, potom sa v bode x_0 nenachádza lokálny extrém a f je v okolí bodu x_0 klesajúca.*

Veta 4. *Nech $x_0 \in D(f)$ je stacionárny bod funkcie f, teda $f'(x_0) = 0$, a nech existuje $f''(x_0)$.*

- *Ak $f''(x_0) > 0$, potom sa v bode x_0 nachádza lokálne minimum.*
- *Ak $f''(x_0) < 0$, potom sa v bode x_0 nachádza lokálne maximum.*

Veta 5. *Nech má funkcia f vlastnú druhú deriváciu na otvorenom intervale I.*

- *Ak pre každé $x \in I$ platí $f''(x) > 0$, potom je f na I konvexná.*
- *Ak pre každé $x \in I$ platí $f''(x) < 0$, potom je f na I konkávna.*

Veta 6.

- *Ak v inflexnom bode x_0 existuje druhá derivácia $f''(x_0)$ funkcie f, potom platí $f''(x_0) = 0$.*
- *Ak $f''(x_0) = 0$ a f'' mení v bode x_0 znamienko, potom je x_0 inflexný bod funkcie f.*
- *Ak $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom je x_0 inflexný bod funkcie f.*

Definícia 7. Priamka $x = x_0$ sa nazýva asymptotou bez smernice funkcie f, ak je aspoň jedna jednostranná limita funkcie f v bode x_0 nevlastná.

Veta 8. *Priamka $y = ax + b$ je asymptotou so smernicou v ∞ funkcie f práve vtedy, keď*

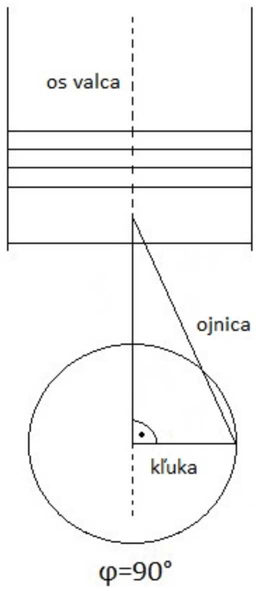
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

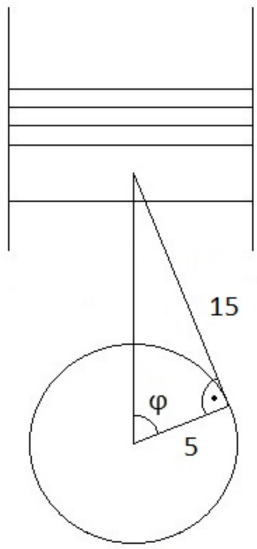
Podobné tvrdenie platí pre asymptotu so smernicou v $-\infty$.

Zhrňme si postup pri vyšetrovaní priebehu funkcie f:

- V prvom rade určíme definičný obor $D(f)$ a obor hodnôt $H(f)$. Môžeme rozhodnúť o tom, či je funkcia párna, nepárna alebo periodická. Pre ľahšiu konštrukciu grafu môžeme tiež nájsť nulové body funkcie a intervaly, na ktorých je kladná, respektíve záporná. Vyšetríme body nespojitosti.
- Spočítame prvú deriváciu a s jej pomocou vyšetríme monotónnosť funkcie a lokálne extrémy, teda nájdeme intervaly, na ktorých rastie, respektíve klesá, a v stacionárnych bodoch alebo v bodoch, kde prvá derivácia neexistuje overíme, či sa nachádza lokálne minimum alebo maximum.
- Spočítame druhú deriváciu a s jej pomocou nájdeme intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, respektíve konkávna, a nájdeme inflexné body. Prípadne použijeme druhú deriváciu pri rozhodovaní o prítomnosti lokálneho extrému.
- Nájdeme asymptoty funkcie f.
- Vypočítame funkčné hodnoty funkcie f a jej derivácie f' vo význačných bodoch.
- Zostrojíme graf funkcie f.

Príklad 9. Vráťme sa k poslednému príkladu z predošlých cvičení. Má piest najväčšiu rýchlosť v momente, kedy zviera kľuka s osou valca pravý uhol? Alebo keď zviera kľuka s ojnicou pravý uhol?





V spomínanom príklade sme odvodili tvar funkcie rýchlosti piestu $f(t) = x'(t)$ v závislosti od času:

$$f(t) = x'(t) = -r\omega \sin(\omega t) - \frac{r^2\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

Tiež sme spočítali prvú deriváciu tejto funkcie:

$$f'(t) = x''(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) - r^2\omega^2 \frac{\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}} - r^4\omega^2 \frac{\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t)}{\left(\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}\right)^3}.$$

Ak má byť rýchlosť piestu v bode $\omega t = \frac{\pi}{2}$ maximálna, potom podľa vety 2 musí byť funkcia f' v tomto bode buď nedefinovaná alebo nulová. Počítajme:

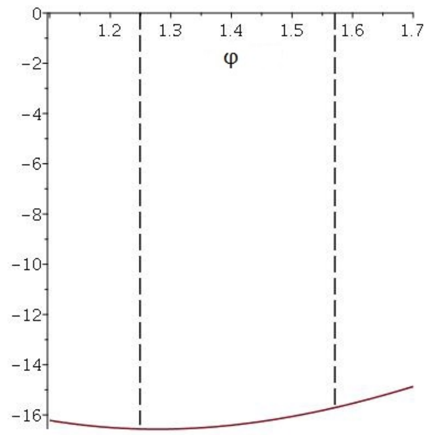
$$f'\left(\frac{1}{200}\right) = \frac{r^2\omega^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} > 0.$$

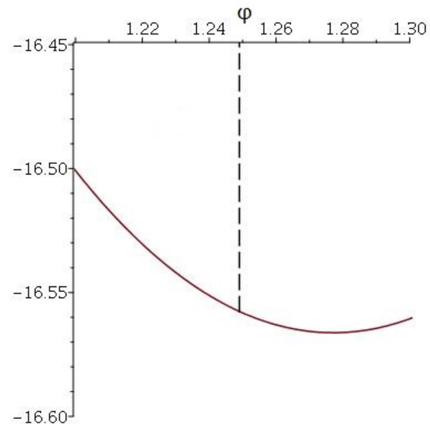
To znamená, že v tomto bode nemôže mať funkcia f lokálny extrém, a tým pádom ani globálny, teda rýchlosť piestu v uvažovanej polohe nie je maximálna. Uvedomme si, že v okolí bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sa veličina x, čo môžeme chápať ako výšku piestu, zmenšuje, takže aj rýchlosť piestu má záporné znamienko. Ak nám vo fáze $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vychádza kladné zrýchlenie, znamená to, že rýchlosť piestu v absolútnej hodnote klesá, a preto k maximálnej rýchlosti piestu dochádza ešte pred tým, ako kľuka zviera pravý uhol s osou valca.

K maximálnej rýchlosti nedochádza ani v druhom prípade. V tejto situácii máme $\tan(\varphi) = \frac{15}{5} = 3$, z čoho dostaneme $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ a $\sin(x) = \frac{3}{\sqrt{10}}$. V tomto bode má zrýchlenie hodnotu

$$-\frac{r\omega^2}{\sqrt{10}} + \frac{4r^2\omega^2}{5\sqrt{l^2 - r^2\frac{9}{10}}} - \frac{9r^4\omega^2}{100\left(\sqrt{l^2 - r^2\frac{9}{10}}\right)^3} \approx -19,5202324\pi^2.$$

Zrýchlenie je v tomto prípade záporné, takže ešte stále dochádza k nárastu rýchlosti, v absolútnej hodnote.





✈

Príklad 10. Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \sin\left(2\arctan x\right).$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = \mathbb{R}$. Keďže obor hodnôt funkcie $2\arctan x$ je $(-\pi, \pi)$, obor hodnôt funkcie f má tvar $H(f) = [-1, 1]$. Funkcia f je spojitá na celom $\mathbb{R}$. Jej jediný nulový bod je 0. V ostatných bodoch má nasledujúce znamienka:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

Vzhľadom k tomu, že platí

$$f(-x) = \sin\left(2\arctan(-x)\right) = \sin\left(-2\arctan x\right) = -\sin\left(2\arctan x\right) = -f(x),$$

je funkcia f nepárna. Evidentne nie je periodická.

Prvá derivácia má tvar

$$f'(x) = \left(\sin\left(2\arctan x\right)\right)' = \frac{2\cos\left(2\arctan x\right)}{1 + x^2}.$$

Zrejme prvá derivácia všade existuje a je vlastná, teda $D(f') = D(f) = \mathbb{R}$. Pozrime sa na jej nulové body. Rovnica $\cos(2\arctan x) = 0$ implikuje $2\arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$, čo znamená, že $x = \pm 1$. Prvá derivácia má teda dva nulové body ± 1. Pomocou vety 1 môžeme analyzovať monotónnosť funkcie f:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Podľa vety 3 sa v bode -1 nachádza lokálne minimum a v bode 1 lokálne maximum.

Spočítajme druhú deriváciu:

$$f''(x) = \left(\frac{2\cos(2\arctan x)}{1+x^2}\right)' = \frac{-4\sin(2\arctan x) - 4x\cos(2\arctan x)}{(1+x^2)^2}.$$

Nulové body druhej derivácie sú riešením rovnice

$$-4\sin(2\arctan x) - 4x\cos(2\arctan x) = 0.$$

Keďže $\cos(2\arctan x) = 0$ nie je riešením, môžeme týmto výrazom deliť a po pár úpravách sa dostaneme k výsledku:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{\sin(2\arctan x)}{\cos(2\arctan x)} = -\frac{2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x) - \sin^2(\arctan x)} \\
&= -\frac{2\cos^2(\arctan x)\dfrac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}}{\cos^2(\arctan x)\left(1 - \dfrac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}\right)} = \frac{-2\tan(\arctan x)}{1 - \tan^2(\arctan x)} = \frac{-2x}{1-x^2} \\
&\Rightarrow x = \frac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow x(1-x^2) = -2x \Rightarrow x(x^2-3) = 0
\end{aligned}$$

Riešením sú body $\pm\sqrt{3}$ a 0. Podľa vety 5 porovnáme znamienka druhej derivácie a konvexnosť/konkávnosť funkcie f:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Podľa definície a vety 6 sú body $\pm\sqrt{3}$ a 0 inflexné.

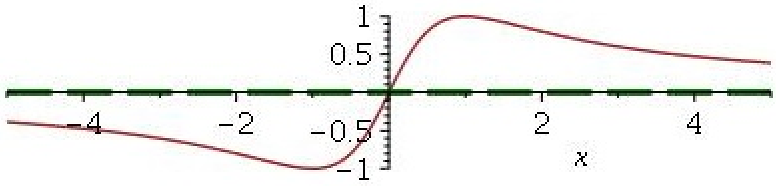
Funkcia nemá body nespojitosti, preto nemôže mať ani asymptoty bez smernice. Asymptotu so smernicou v ∞ môžeme nájsť s použitím vety 8:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2\arctan x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sin(2\arctan x)}_{\text{ohr.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(\sin(2\arctan x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\sin(\underbrace{2\arctan x}_{\lim_{x\to\infty}\text{ je vlastná}}) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} 2\arctan x\right) = \sin(\pi) = 0.$$

Zistili sme, že priamka $y = 0$ je asymptotou so smernicou v ∞ funkcie f. Podobné výpočty by ukázali, že táto priamka je zároveň aj asymptotou so smernicou v $-\infty$.

Na záver funkčné hodnoty a graf: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(0) = 2$, $f'(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$ a $f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$.



✈

Príklad 11. Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Definičný obor funkcie f je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Obor hodnôt funkcie $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a preto platí $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$. Keďže $f(-1) = \arctan(2) \neq \pm f(1) = 0$, funkcia f nie je ani párna ani nepárna. Tiež zrejme nie je periodická. Bod 1 je jediný bod, v ktorom platí $f(1) = 0$. K zmene znamienka môže dôjsť len v bodoch $\{0, 1\}$, preto platí:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Vyšetrime druh nespojitosti v bode 0. Keďže platí

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{0^+ - 1}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{0^- - 1}{0^-} = \infty,$$

dostávame

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Obidve jednostranné limity sú vlastné no rôzne, takže v bode 0 má f nespojitosť prvého druhu, teda skok.

Spočítame prvú deriváciu:

$$f'(x) = \left(\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\,\frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2+(x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}.$$

Polynóm $2x^2 - 2x + 1$ nemá reálny koreň, preto platí $D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, čo znamená, že v každom bode, kde je f definovaná, má táto funkcia aj vlastnú deriváciu. Všimnime si, že pre každé $x \in D(f')$ platí $f'(x) > 0$. Špeciálne, funkcia f podľa vety 2 nemá extrémy. V nasledujúcej tabuľke je v súlade s vetou 1 vyšetrovaná monotónnosť:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Uvedomme si, že nemôžeme povedať, že funkcia f je rastúca na celom definičnom obore, pretože platí $f(-\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2})$ aj napriek faktu $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. To je spôsobené práve skokom v bode 0.

Pozrime sa na druhú deriváciu:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2x^2-2x+1}\right)' = ((2x^2-2x+1)^{-1})' = \frac{2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}.$$

Definičným oborom druhej derivácie je opäť $D(f'') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jej jediný nulový bod je $\frac{1}{2}$. Podľa znamienka druhej derivácie určíme pomocou vety 5 intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, respektíve konkávna.

	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$	$\cap$

Keďže má f v bode $\frac{1}{2}$ vlastnú deriváciu, je podľa definície a vety 6 bod $\frac{1}{2}$ inflexný bod.

Jediné body, v ktorých sa môžu vyskytnúť asymptoty bez smernice, sú body nespojitosti. Funkcia f má jediný bod nespojitosti, 0, v ktorom má vlastné jednostranné limity, čo podľa definície 7 znamená, že f nemá žiadnu asymptotu bez smernice. S použitím vety 8 zistime, či má asymptotu so smernicou v ∞:

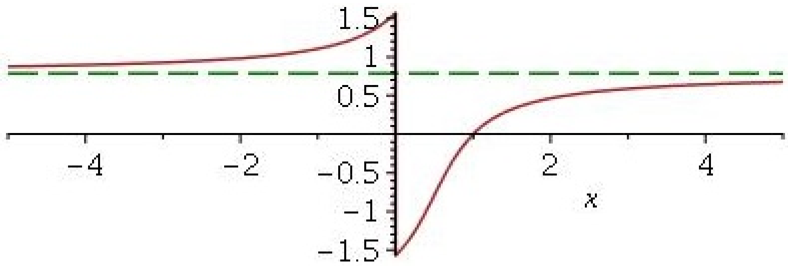
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\text{ohraničená}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0.$$

Teraz dopočítame koeficient b:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to 1}(\arctan x) = \frac{\pi}{4}.$$

To znamená, že funkcia f má asymptotu so smernicou v ∞ a jej predpis je $y = \frac{\pi}{4}$. Opäť pomocou vety 8 by sme prostredníctvom veľmi podobných výpočtov dospeli k záveru, že uvedená priamka je zároveň aj asymptotou so smernicou v $-\infty$.

Nakoniec dopočítame niektoré funkčné hodnoty a zostrojíme graf: $f(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, $f'(\frac{1}{2}) = 2$.



✈

Príklad 12. Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}.$$

Uvedená funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla, teda $D(f) = \mathbb{R}$. Obor hodnôt funkcií $x^3 - x$ a $\sqrt[3]{\ }$ je $\mathbb{R}$, a preto tiež platí $H(f) = \mathbb{R}$. Funkcia je spojitá v každom bode, keďže sa jedná o zloženie elementárnych funkcií, ktorých definičný obor je $\mathbb{R}$. Jej nulové body sú $\{-1, 0, 1\}$. Nasledujúca tabuľka uvádza znamienka funkcie f na jendotlivých intervaloch:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Pozrime sa na jej paritu:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - (-x)} = \sqrt[3]{-x^3 - (-x)} = \sqrt[3]{-(x^3 - x)} = -\sqrt[3]{x^3 - x} = -f(x).$$

Zistili sme, že funkcia f je nepárna. To znamená, že jej chovanie bude svojim spôsobom symetrické a nám stačí vyšetrovať ju na jednom z intervalov $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$.

Prejdime k derivovaniu:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3 - x}\right)' = \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2}.$$

Uvedomme si, že pri počítaní derivácie sme použili vetu o derivovaní zloženej funkcie, kde v našom prípade platí $f = h \circ g$, $h = \sqrt[3]{\ }$ a $g = x^3 - x$. Avšak v bodoch -1, 0 a 1 je funkcia g nulová a v nule má funkcia h nevlastnú deriváciu, čo je v spore s predpokladmi tejto vety. V bodoch -1, 0 a 1 preto musíme deriváciu funkcie f vypočítať z definície:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x} - \sqrt[3]{1^3 - 1}}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x - 1} \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 1} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} \qquad \left(\text{typ } \frac{c}{0}\right)$$

Vyšetríme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} = \frac{1}{3}\frac{3(1^+)^2 - 1}{(\sqrt[3]{(1^+)^3 - 1^+})^2} = \frac{1}{3}\frac{2^+}{(\sqrt[3]{0^+})^2} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} = \frac{1}{3}\frac{3(1^-)^2 - 1}{(\sqrt[3]{(1^-)^3 - 1^-})^2} = \frac{1}{3}\frac{2^-}{(\sqrt[3]{0^-})^2} = \infty$$

Takže v bode 1 platí $f'(1) = \infty$. Keďže f je nepárna, tiež platí $f'(-1) = \infty$. Zostáva nám vyšetriť bod 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{x} \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} \qquad \left(\text{typ } \frac{c}{0}\right)$$

Opäť sa pozrieme na jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} = \frac{1}{3}\frac{3(0^+)^2 - 1}{(\sqrt[3]{(0^+)^3 - 0^+})^2} = \frac{1}{3}\frac{-1^+}{(\sqrt[3]{0^-})^2} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2} = \frac{1}{3}\frac{3(0^-)^2 - 1}{(\sqrt[3]{(0^-)^3 - 0^-})^2} = \frac{1}{3}\frac{-1^+}{(\sqrt[3]{0^+})^2} = -\infty.$$

Zistili sme, že v bode 0 má funkcia f nevlastnú deriváciu $f'(0) = -\infty$. Jediné nulové body prvej derivácie sú riešenia rovnice

$$3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pomocou vety 1 zistíme, kde f rastie, a kde klesá:

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Podľa vety 3 sa v bode $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ nachádza lokálne maximum a v bode $\frac{\sqrt{3}}{3}$ lokálne minimum.

Pozrieme sa na druhú deriváciu:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}\frac{3x^2 - 1}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^2}\right)' = \frac{1}{3}\frac{6x(\sqrt[3]{x^3 - x})^2 - \frac{2}{3}\frac{(3x^2 - 1)^2}{\sqrt[3]{x^3 - x}}}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^4} = \frac{1}{3}\frac{6x(x^3 - x) - \frac{2}{3}(3x^2 - 1)^2}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^5}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{-2x^2 - \frac{2}{3}}{(\sqrt[3]{x^3 - x})^5}$$

Zrejme platí $D(f'') = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Vzhľadom k tomu, že čitateľ nikdy nie je nulový, v žiadnom bode nie je nulová ani druhá derivácia. Teraz sa pozrieme na jej znamienko a na jeho základe podľa vety 5 rozhodneme o konvexnosti/konkávnosti funkcie f:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Vzhľadom k tomu, že f je spojitá v bodoch $\{-1,0,1\}$, sú podľa definície a vety 6 tieto body inflexné.

Funkcia nemá body nespojitosti, takže nemôže mať ani asymptoty bez smernice. Použijúc vetu 8 nájdeme asymptotu so smernicou v ∞:

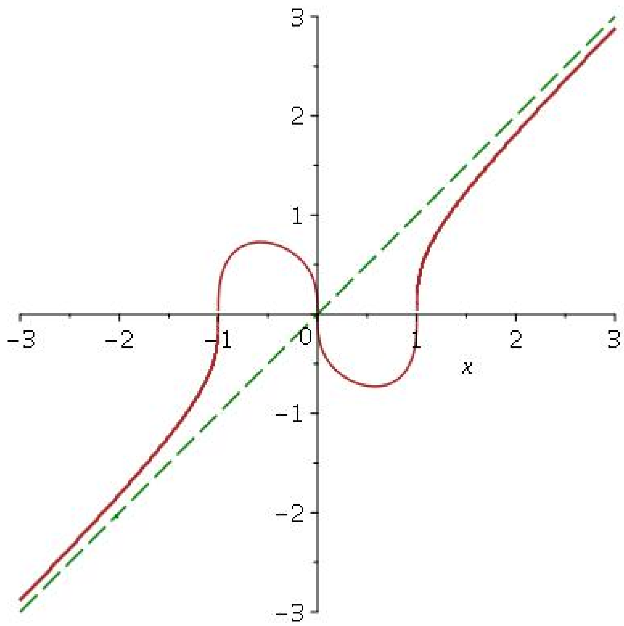
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(1-\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x}-1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^3(\sqrt[3]{1-x^{-2}})^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{x(\sqrt[3]{1-x^{-2}})^2}\right)=0.$$

To znamená, že priamka $y=x$ je asymptotou so smernicou v ∞. Opäť nie je ťažké overiť, že rovnako by to dopadlo aj s asymptotou so smernicou v $-\infty$.

Dopočítame funkčné hodnoty a zostrojíme graf: $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$. ✈



Obr. 1: Príklad 12

Poznámka. Pozastavme sa nad výpočtami prvej derivácie v predošlom príklade. Situácia bola taká, že v rýdzom okolí bodu 1 sme mali spočítanú prvú deriváciu $f'(x)$. V bode 1 sme ju nemohli dopočítať, pretože v ňom neboli splnené predpoklady vety o derivovaní zloženej funkcie. Preto sme sa rozhodli vypočítať ju priamo z definície. Všimnime si že po aplikovaní l'Hospitalovho pravidla sme v skutočnosti počítali limitu $\lim_{x\to 1} f'(x)$. Tá exitovala, takže sme usúdili, že existuje aj pôvodná limita a tieto sa rovnajú. Pozrime sa na to zo všeobecnejšieho hľadiska.

Buď f funkcia spojitá v bode x_0 majúca prvú deriváciu v nejakom rýdzom okolí bodu x_0. Derivácia funkcie f v bode x_0 je z definície limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Rovnosť $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ platí vždy, bez ohľadu na funkciu f. Na druhej strane predpoklad o spojitosti funkcie f v bode x_0 implikuje priamo z definície platnosť rovnosti

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

To znamená, že limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je typu $\frac{0}{0}$ a my môžeme použiť l'Hospitalovo pravidlo, ktoré nás v našom prípade privedie k limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))'}{(x-x_0)'} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Takže fakt, že sme sa dopracovali k limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ nie je náhoda. No musíme si uvedomiť, že l'Hospitalovo pravidlo ponúka len postačujúcu podmienku, čiže aj keby neexistovala limita $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, môže mať funkcia f v bode x_0 deriváciu. Ilustrujme si to na príklade.

Nech má funkcia f nasledujúci tvar:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{ak } x = 0. \end{cases}$$

Funkcia f je spojitá na celom $\mathbb{R}$ a pre každé $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Limita prvého sčítanca je síce 0, no limita druhého sčítanca zrejme neexistuje, preto neexistuje ani limita $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Vypočítajme deriváciu $f'(0)$ z definície:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Tento príklad zároveň ukazuje, že l'Hospitalovo pravidlo je skutočne len postačujúcou podmienkou existencie pôvodnej limity, nie nutnou.

Príklad 13. Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}.$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Najprv vyšetríme charakter nespojitosti v počiatku. Limita je typu $\frac{1}{0}$, takže rozhodneme na základe jednostranných limít:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \frac{\sqrt[3]{(0^+-1)^2}}{0^+} = \frac{\sqrt[3]{(-1^+)^2}}{0^+} = \frac{\sqrt[3]{1^-}}{0^+} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \frac{\sqrt[3]{(0^--1)^2}}{0^-} = \frac{\sqrt[3]{(-1^-)^2}}{0^-} = \frac{\sqrt[3]{1^+}}{0^-} = -\infty.$$

Obidve jednostranné limity sú nevlastné a majú opačné znamienko, preto má funkcia v bode 0 nespojitosť druhého druhu.

Aby sme si mohli lepšie predstaviť obor hodnôt, spočítame limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\left(x^{\frac{3}{2}}(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})\right)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})^2}=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{\left(|x|^{\frac{3}{2}}(-|x|^{-\frac{1}{2}}-|x|^{-\frac{3}{2}})\right)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{|x|^3(-|x|^{-\frac{1}{2}}-|x|^{-\frac{3}{2}})^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt[3]{(-|x|^{-\frac{1}{2}}-|x|^{-\frac{3}{2}})^2}=0.$$

Podľa Bolzanovej vety spojitá funkcia zobrazí ohraničený uzavretý interval opäť na ohraničený uzavretý interval. Funkcia f je na intervaloch $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ spojitá. To spolu s predošlými rovnosťami implikuje nasledujúce inklúzie: $(-\infty,0)\subseteq f(-\infty,0)$ a $(0,\infty)\subseteq f(0,\infty)$[1]. Ak si navyše všimneme, že $f(1)=0$, dostaneme $H(f)=\mathbb{R}$.

Keďže platí $f(-1)=-\sqrt[3]{4}\neq\pm f(1)=0$, funkcia nie je ani párna ani nepárna. Evidentne nie je ani periodická. Jediný bod, v ktorom nadobúda nulovú funkčnú hodnotu je 1. Pozrime sa na jej znamienka:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Spočítajme prvú deriváciu:

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}\right)'=\frac{\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2}=\frac{\frac{2}{3}x-(x-1)}{x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}}=\frac{-x+3}{3x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}}.$$

Uvedomme si, že deriváciu v bode 1 musíme opäť vyšetriť zvlášť:

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}}{x-1}=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x-1}}}_{\text{typ }\frac{1}{0}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x-1}}=\dfrac{1}{1^+\cdot\sqrt[3]{1^+-1}}=\dfrac{1}{1^+\cdot\sqrt[3]{0^+}}=\infty,\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x-1}}=\dfrac{1}{1^-\cdot\sqrt[3]{1^--1}}=\dfrac{1}{1^-\cdot\sqrt[3]{0^-}}=-\infty.\end{cases}$$

Derivácia v bode 1 preto neexistuje. Jediný nulový bod prvej derivácie je 3. V nasledujúcej tabuľke vyšetrujeme podľa vety 1 monotónnosť funkcie f:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Podľa vety 3 nadobúda funkcia f v bode 1 lokálne minimum a v bode 3 lokálne maximum.

Prejdime k druhej derivácii:

$$f''(x)=\left(\frac{-x+3}{3x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}}\right)'=\frac{-3x^2\cdot\sqrt[3]{x-1}-(3-x)\left(6x\cdot\sqrt[3]{x-1}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)}{9x^4\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

[1] Limitné vzťahy a Bolzanova veta implikujú, že každý uzavretý a ohraničený podinterval intervalu $(-\infty,0)$ je podmnožinou oboru hodnôt funkcie f zúženej na interval $(-\infty,0)$. Dôsledkom toho je inklúzia $(-\infty,0)\subseteq f(-\infty,0)$. Rovnako sme postupovali v prípade $(0,\infty)\subseteq f(0,\infty)$.

$$= \frac{-3x^2(x-1)-(3-x)\left(6x(x-1)+x^2\right)}{9x^4\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{4x^2-24x+18}{9x^3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

Pre jej definičný obor platí $D(f'') = D(f') = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Nulové funkčné hodnoty nadobúda v bodoch $\frac{6\pm3\sqrt{2}}{4}$. Pozrime sa s použitím vety 5 na konvexnosť/konkávnosť funkcie f:

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{6-3\sqrt{2}}{4}\right)$	$\left(\frac{6-3\sqrt{2}}{4},1\right)$	$\left(1,\frac{6+3\sqrt{2}}{4}\right)$	$\left(\frac{6+3\sqrt{2}}{4},\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Podľa definície a vety 6 sú body $\frac{6\pm3\sqrt{2}}{4}$ inflexné.

V prvom odstavci tohto príkladu sme zistili, že priamka $x=0$ je asymptotou bez smernice funkcie f. Keďže bod 0 je jej jediný bod nespojitosti, inú asymptotu bez smernice nemá. Vyšetrime asymptotu so smernicou v ∞:

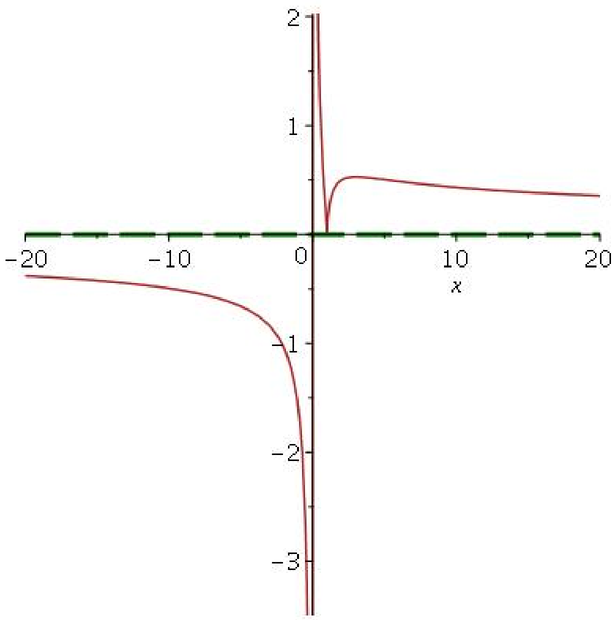
$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\left(x^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right)^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2}}{x^2}$$

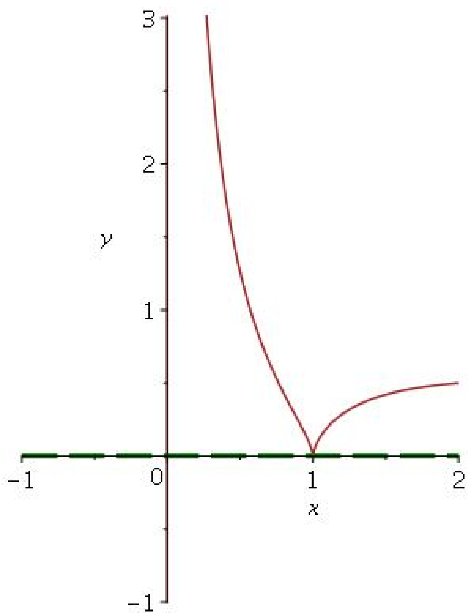
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} - 0\cdot x\right) = 0. \qquad \text{(Spočítali sme v prvom odstavci.)}$$

Zistili sme, že priamka $y=0$ je asymptotou so smernicou v ∞. Podobne by sa ukázalo, že je zároveň aj asymptotou so smernicou v $-\infty$.

Na záver význačné funkčné hodnoty a graf: $f(3) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $f\left(\frac{6+3\sqrt{2}}{4}\right) =$ a $f\left(\frac{6-3\sqrt{2}}{4}\right) =$.





✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf

[3] DOŠLÁ, Zuzana. a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*