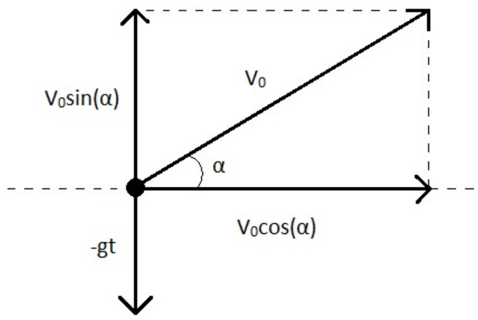
MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 4. cvičenie, 28.10.2020

Optimalizácia

Príklad 1. Pod akým uhlom α je nutné vrhnúť objekt rýchlosťou v_0 tak, aby na rovine prekonal čo najväčšiu horizontálnu vzdialenosť? Odpor vzduchu zanedbajte.

Označme symbolom $h(t)$ výšku, v ktorej sa nachádza predmet v čase t. Veľkosť vertikálnej zložky rýchlosti v_0 môžeme vyjadriť súčinom $v_0 \cdot \sin(\alpha)$. Nárast veličiny h spôsobený počiatočnou rýchlosťou reprezentuje výraz $v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t$. Na druhej strane, na vrhnutý predmet pôsobí gravitačné pole Zeme, ktoré mu vo vertikálnom smere udeľuje konštantné zrýchlenie $-g$. Vieme, že v takom prípade je úbytok aktuálnej výšky daný výrazom $-\frac{gt^2}{2}$. V konečnom dôsledku platí

$$h(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$



V prvom rade potrebujeme zistiť, v akom čase predmet dopadne na zem. To zistíme vyriešením rovnice

$$0 = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = t\left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{gt}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}.$$

Horizontálna vzdialenosť dosiahnutá predmetom za čas t je $v_0 \cos(\alpha)t$. Preto kým predmet dopadne na zem, prekoná vzdialenosť

$$s(\alpha) = v_0 \cos(\alpha)\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Zrejme má zmysel uvažovať len uhly α z intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Na tomto intervale nájdeme stacionárne body funkcie s:

$$s'(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos(2\alpha)}{g}, \qquad s'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(2\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2},$$

čo znamená, že funkcia s má na intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$ jediný stacionárny bod, ktorým je $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Z kontextu je zrejmé, že v tomto bode má uvažovaná funkcia globálne maximum na intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$. Po správnosti by sme sa mali uistiť, že sa jedná o lokálny extrém a porovnaním s funkčnými hodnotami v krajných bodoch ukázať, že sa v bode $\frac{\pi}{4}$ nachádza dokonca globálny extrém. Pre úplnosť tak učiňme:

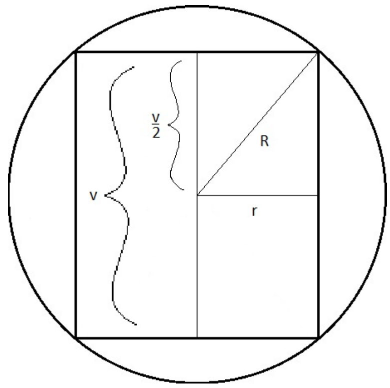
$$s''(\alpha) = -\frac{4v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \qquad s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0,$$

čo implikuje prítomnosť lokálneho maxima. Keďže $s(0) = 0$, $s(\frac{\pi}{2}) = 0$ a $s(\frac{\pi}{4}) = \frac{v_0^2}{g} > 0$, má funkcia s na intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$ globálne maximum v bode $\frac{\pi}{4}$. ✈

Príklad 2. Určte rozmery valca s najväčším objemom, ktorý môžeme vložiť do sféry s polomerom R.

Označme symbolmi r a v polomer a výšku uvažovaného valca. Zrejme stačí uvažovať len valce, ktorých hrany ležia na sfére, inak povedané len tie valce, ktoré nemožno rozšíriť ani zvýšiť bez toho, aby vyšli von zo sféry. Po nakreslení obrázku zistíme, že v takom prípade parametre sféry a valca spĺňajú rovnosť

$$\frac{v^2}{4} + r^2 = R^2 \qquad \Rightarrow$$
$$v = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$



Objem valca je potom určený vzťahom

$$V = \pi r^2 v = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Úlohu zo zadania môžeme formulovať ako hľadanie globálneho maxima funkcie $V(r)$ na intervale $[0, R]$. Prvá derivácia má tvar

$$V'(r) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Stacionárne body sú riešením rovnice

$$4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad \Rightarrow \quad 2r(R^2 - r^2) = r^3$$
$$\Rightarrow r(2R^2 - 3r^2) = 0 \Rightarrow r \in \left\{0, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right\}.$$

Opäť je intuitívne zrejmé, že hľadaný polomer valca je $\sqrt{\frac{2}{3}}R$. Presvedčme sa o tom, že v tomto bode má funkcia $V(r)$ skutočne globálne maximum. Upravme prvú deriváciu a pozrime sa na jej znamienka.

$$V'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

	$\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right)$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R, R\right)$
$V'(r)$	$+$	$-$
$V(r)$	$\nearrow$	$\searrow$

Zistili sme, že v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ má funkcia V skutočne lokálne maximum. Na záver porovnáme funkčné hodnoty v krajných bodoch intervalu $[0, R]$ s hodnotou $V(\sqrt{\frac{2}{3}}R)$:

$$V(0) = 0, \qquad V(R) = 0, \qquad V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3 > 0. \tag{1}$$

Takže v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}R$ nastáva globálne maximum funkcie V na intervale $[0, R]$. Výška valca maximálneho objemu je

$$v = \frac{V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)}{\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

✈

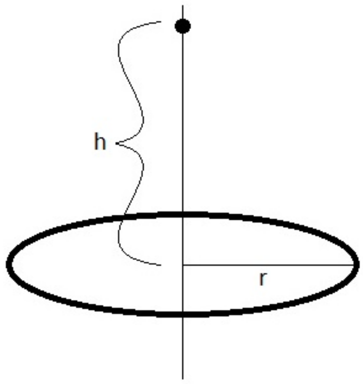
Príklad 3. Dá sa ukázať, že príťažlivá sila, ktorou pôsobí prstenec na predmet nachádzajúci sa na jeho osi, je priamo úmerná veličine

$$f(h) = \frac{h}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde r je polomer prstenca a h je vzdialenosť predmetu od stredu prstenca. Zistite, v ktorom bode osi prstenca je silové pôsobenie na predmet najväčšie.

Spočítame prvú deriváciu funkcie $f(h)$:

$$\begin{aligned} f'(h) &= \frac{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2\sqrt{r^2+h^2}}{(r^2+h^2)^3} \\ &= \frac{(r^2+h^2) - 3h^2}{(r^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{r^2-2h^2}{(r^2+h^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$



Vzhľadom k symetrii nám stačí uvažovať h z intervalu $[0,\infty)$. Nájdeme stacionárne body a vyšetríme znamienka prvej derivácie.

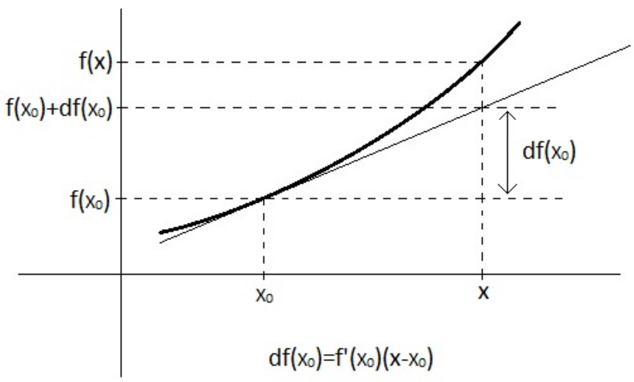
$$r^2 - 2h^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{2}}{2}r.$$

	$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r, \infty\right)$
$f'(h)$	$+$	$-$
$f(h)$	$\nearrow$	$\searrow$

To znamená, že v bode $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ sa nachádza globálne maximum funkcie f na množine $[0,\infty)$. ✈

Diferenciál funkcie

Definícia 4. Nech má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ vlastnú deriváciu. Diferenciálom funkcie f v bode x_0 nazývame výraz $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.



Pre body x dostatočne blízke bodu x_0 platí $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. To môžeme využiť pri výpočte približných hodnôt niektorých výrazov. V prvom rade nájdeme vhodnú funkciu f, pre ktorú platí $x \in D(f)$ a $f(x)$ je hodnota, ktorú sa snažíme približne určiť. Ďalej by sme mali byť schopný nájsť bod $x_0 \in D(f)$, ktorý je blízko bodu x a hodnoty $f(x_0)$ a $f'(x_0)$ sú ľahko vyčísliteľné.

Príklad 5. Pomocou diferenciálu určte približne hodnotu $\log_2(65)$.

Keďže hodnotu $\log_2(64) = 6$ vieme vyčísliť presne, použijeme diferenciál funkcie $f(x) = \log_2(x)$ v bode $x_0 = 64$. Zo znalosti prvej derivácie funkcie f dostávame

$$f'(x) = \frac{1}{x\log(2)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}f(x_0) = \frac{1}{x_0\log(2)}(x - x_0).$$

Vzhľadom k tomu, že platí $f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ môžeme približne určiť hodnotu $\log_2(65)$:

$$\log_2(65) \approx \log_2(64) + \frac{1}{64 \cdot \log(2)}(65 - 64) = 6 + \frac{1}{64 \cdot \log(2)} \approx 6,0519.$$

Presná hodnota je približne $6,0224$. ✈

Príklad 6. Pomocou diferenciálu určte približne hodnotu $\sqrt[3]{28}$.

Zvolíme funkciu $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a bod $x_0 = 27$. Prvá derivácia funkcie f je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Platí

$$\mathrm{d}f(x_0) = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2}(28 - 27) = 3 + \frac{1}{3 \cdot 9} = 3,\overline{037}.$$

Presná hodnota je približne $3,0366$. ✈

Taylorov polynóm

Definícia 7. Predpokladajme, že funkcia f má v bode $x_0 \in D(f)$ vlastné derivácie $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ až do rádu n. Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x)$ stupňa n so stredom v bode x_0 je nasledujúci polynóm:

$$T_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Veta 8. *Nech má funkcia $f(x)$ spojité derivácie $f'(x)$, $f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ na intervale $[a, b]$ a nech má vlastnú deriváciu $f^{(n+1)}(x)$ na intervale (a, b). Potom pre každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ s vlastnosťou*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \ \textit{kde} \ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

a $T_n(x)$ je Taylorov polynóm funkcie $f(x)$ stupňa n so stredom v bode a.

Ak sme schopní ohraničiť deriváciu $f^{(n+1)}$ na intervale (a, x), potom sme tiež schopní na základe predošlej vety zhora odhadnúť chybu aproximácie funkcie f jej Taylorovým polynómom v bode x.

Príklad 9. Nájdite Taylorov polynóm piateho stupňa funkcie $f(x) = \log(x)$ so stredom v bode $x_0 = 1$ a s jeho pomocou približne vypočítajte hodnotu $\log(2)$.

V prvom rade potrebujeme všetky derivácie až do piateho rádu funkcie $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Tie vyhodnotíme v strede Taylorovho polynómu $x_0 = 1$:

$$f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6, \quad f^{(5)}(1) = 24.$$

Už máme všetko potrebné na to, aby sme skonštruovali Taylorov polynóm $T_5(x)$ piateho stupňa funkcie $f(x) = \log(x)$ so stredom v bode $x_0 = 1$:

$$T_5(x) = 0 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4 + \frac{24}{120}(x-1)^5.$$

Pre x dostatočne blízke x_0 platí $T_n(x) \approx f(x)$, čo využijeme pri približnom výpočte hodnoty $\log(2)$:

$$\begin{aligned}T_5(2) &= 0 + 1 \cdot (2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{2}{6}(2-1)^3 - \frac{6}{24}(2-1)^4 + \frac{24}{120}(2-1)^5 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{6} - \frac{6}{24} + \frac{24}{120} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0,78\overline{3}.\end{aligned}$$

Presná hodnota je približne $0,693$. ✈

Príklad 10. Pomocou Taylorovho polynómu vhodnej funkcie určte približnú hodnotu čísla π.

Vzhľadom k tomu, že platí $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, skúsime použiť funkciu arcsin. Pomocou jej Taylorovho polynómu so stredom v bode $x_0 = 0$ približne určíme jej funkčnú hodnotu v bode $\frac{1}{2}$ a výsledok vynásobíme 6. Začneme výpočtom jej derivácií:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ f'''(x) &= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{4x(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - (2x^2+1)\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^5} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}, \\ f^{(5)}(x) &= \frac{(18x^2+9)(1-x^2)^{\frac{7}{2}} - (6x^3+9x)\frac{7}{2}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^7} = \frac{24x^4+72x^2+9}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}.\end{aligned}$$

Teraz nájdeme ich funkčné hodnoty v 0:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 9.$$

Hodnota $\arcsin(\frac{1}{2})$ je približne rovná funkčnej hodnote Taylorovho polynómu $T_5(\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned}T_5\left(\frac{1}{2}\right) &= f(0) + f'(0)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + 0 + 9 \cdot \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{32} = 0,52317708\overline{3}\end{aligned}$$

V konečnom dôsledku dostávame odhad hodnoty π:

$$\pi \approx 6 \cdot T_5\left(\frac{1}{2}\right) = 3,1390625 \tag{2}$$

líšiaci sa od skutočnej hodnoty len o približne dve a pol tisíciny. ✈

Príklad 11. Skonštruujte Taylorov polynóm funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ so stredom v bode $x_0 = 1$ stupňa n a odhadnite jeho chybu v bode 2.

Najprv spočítame niekoľko prvých derivácií funkcie $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{5}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3\cdot x^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)x^{-\frac{7}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot 3\cdot 5\cdot x^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{105}{16}\right)x^{-\frac{9}{2}} &&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}
$$

Zdá sa, že vo všeobecnosti pre funkciu $f(x) = \sqrt{x}$ platí

$$
f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(2n-3)!!\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}, \tag{$*$}
$$

kde $k!! = k(k-2)(k-4)\cdots$ je súčin všetkých prirodzených čísel z množiny $\{1,\ldots,k\}$, ktoré majú rovnakú paritu ako k. Presvedčme sa o platnosti tejto formule použitím matematickej indukcie. Pre $n = 1$ tvrdenie zrejme platí[1]. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n a ukážme, že v skutočnosti platí aj pre $n+1$. Spočítajme $n+1$. deriváciu funkcie f:

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' &= \left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(2n-3)!!\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}\right)' \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(2n-3)!!\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)!!\cdot x^{\frac{-2n+1-2}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot(2n-1)!!\cdot x^{-\frac{2(n+1)-1}{2}},
\end{aligned}
$$

čo je presne formula $(*)$, kde sme za n dosadili $n+1$, takže tvrdenie je dokázané. Taylorov polynóm funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ stupňa n so stredom v bode $x_0 = 1$ má preto tvar

$$
T_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\cdot\frac{(2i-3)!!}{i!}(x-1)^i.
$$

Funkcia x^{-r}, kde $r > 1$ je na intervale $[1,b]$, kde $b > 2$ je ľubovoľné, klesajúca a kladná, takže funkcia $-x^{-r}$ je na tom istom intervale rastúca a záporná. V každom prípade, v absolútnej hodnote tieto funkcie nadobúdajú maximum v ľavom krajnom bode intervalu $[1,b]$, teda v bode 1. To nám umožňuje s použitím vety 8 zhora odhadnúť chybu aproximácie funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ jej Taylorovým polynómom $T_n(x)$ v bode 2:

$$
f(2) = T_n(2) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1}}_{R_n(2),c\in(1,2)} \Rightarrow |f(2)-T_n(2)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|
$$

Ďalej platí

$$
\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(1)}{(n+1)!}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{(2n-1)!!}{n!}
$$

[1] Symbol $k!!$ pre nekladné celé čísla má zmysel dodefinovať vzťahom $k!! = 1$ vzhľadom k tomu, že sa v skutočnosti jedná o prázdny súčin, o súčin prvkov z prázdnej množiny.

$$= \frac{1}{2(n+1)} \underbrace{\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n \cdot 2(n-1)\cdots 2}}_{<1} \leq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Takže v konečnom dôsledku dostávame horný odhad pre chybu aproximácie funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ jej Taylorovým polynómom $T_n(x)$ v bode 2:

$$\left|\sqrt{2} - T_n(2)\right| \leq \frac{1}{2(n+1)}. \tag{$**$}$$

V každom prípade platí, že postupnosť $\{T_n(2)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu $\sqrt{2}$. Podľa odhadu $(**)$ nám stačí vypočítať hodnotu $T_4(2)$, aby sme sa s presnosťou $0,1$ priblížili k číslu $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} T_4(2) &= f(1) + f'(1)(2-1) + \frac{f''(1)}{2!}(2-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(2-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(2-1)^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6} - \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{24} = \frac{384+192-48+24-15}{384} = \frac{537}{384} = 1,3984375. \end{aligned}$$

Vzhľadom k tomu, že skutočná hodnota je približne $\sqrt{2} \approx 1,4142$, je chyba aproximácie menšia, ako sme očakávali. ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana. a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*

[4] `https://mathalino.com/reviewer/differential-calculus/72-74-light-intensity-of-illumination-and-theory-of-attraction`