MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 5. cvičenie, 4.11.2020

Základné integračné metódy

Neurčitý integrál funkcie f je množina všetkých funkcií, ktorých derivácia na nejakom intervale I je práve f. Keďže všetky takéto funkcie sa líšia len o konštantu, platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

kde $F(x)$ je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, čo znamená, že na intervale I spĺňa rovnosť $F'(x) = f(x)$. Uveďme základné integračné metódy.

Veta 1 (linearita neurčitého integrálu)**.** *Nech $a \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom platí*

- *Ak je $F(x)$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, potom je $aF(x)$ primitívna funkcia k funkcii $af(x)$:*
$$\int a \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$
- *Ak je $F(x)$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ a $G(x)$ primitívna funkcia k funkcii $g(x)$, potom je $F(x) \pm G(x)$ primitívna funkcia k funkcii $f(x) \pm g(x)$:*
$$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Veta 2 (integrovanie po častiach - metóda per partes)**.** *Nech majú funkcie $u(x)$ a $v(x)$ deriváciu na intervale I a nech má funkcia $u(x)v'(x)$ na tomto intervale primitívnu funkciu $H(x)$. Potom je funkcia $u(x)v(x) - H(x)$ primitívna k funkcii $u'(x)v(x)$:*

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Pravidlo per partes sa dá jednoducho odvodiť z pravidla pre derivovanie súčinu funkcií:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad \int (uv)' = \int u'v + \int uv' \quad \Rightarrow \quad uv = \int u'v + \int uv'.$$

Veta 3 (substitučná metóda I)**.** *Nech je funkcia $f(t)$ definovaná na intervale I a nech má funckia $\varphi(x)$ deriváciu na intervale J, pričom platí $\varphi(J) \subseteq I$. Ak má $f(t)$ primitívnu funkciu $F(t)$ na intervale I, potom je $F(\varphi(x))$ primitívna funkcia k $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervale J.*

Použitie tejto metódy schematicky znázorníme nasledujúcim spôsobom:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Big(= F(t) = F(\varphi(x))\Big). \tag{4}$$

Myšlienka tejto metódy je nasledujúca. Ak si všimneme, že integrand je v tvare $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, použijeme substitúciu $t = \varphi(x)$ a výraz $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ nahradíme diferenciálom $\mathrm{d}t$. To nás privedie k integrálu $\int f(t)\,\mathrm{d}t$. Povedzme, že sme schopní tento integrál vypočítať a výsledná primitívna funkcia je $F(t)$. Opäť prostredníctvom substitúcie $t = \varphi(x)$ sa vrátime k pôvodnej premennej x, čoho výsledkom je funkcia $F(\varphi(x))$, a tá je podľa predošlej vety riešením pôvodného problému.

Veta 4 (substitučná metóda II)**.** *Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale I a nech má funckia $\psi(t)$ nenulovú deriváciu na intervale J, pričom platí $\psi(J) = I$. Ak má $f(\psi(t))\psi'(t)$ primitívnu funkciu $F(t)$ na intervale J, potom je $F(\psi^{-1}(x))$ primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I.*

Použitie tejto metódy schematicky znázorníme nasledujúcim spôsobom:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{c} x = \psi(t) \\ \mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \Big(= F(t) = F(\psi^{-1}(x))\Big). \tag{5}$$

Myšlienka tejto metódy je nasledujúca. Niekedy je užitočné nahradiť pôvodnú premennú x výrazom $\psi(t)$ v novej premennej t. Po nahradení diferenciálu $\mathrm{d}x$ pôvodnej premennej výrazom $\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ má integrand tvar $f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t$. Povedzme, že táto funkcia má primitívnu funkciu $F(t)$. Návratom k pôvodnej premennej x prostredníctvom transformácie $t = \psi^{-1}(x)$ sa dostaneme k funkcii $F(\psi^{-1}(x))$, ktorá je podľa predošlej vety riešením pôvodného problému. Inverzná transformácia $t = \psi^{-1}(x)$ existuje vďaka predpokladu o nenulovosti derivácie funkcie ψ na intervale J.

Pri obidvoch substitučných metódach prostredníctvom nejakej transformácie prechádzame od starej premennej k novej. Treba mať na pamäti, že nikdy nemôže dôjsť k pomiešaniu premenných. Po uskutočnení substitučnej metódy musí v integráli vystupovať len jedna a to nová premenná. Opačná situácia svedčí o prítomnosti chyby. Pri nahrádzaní diferenciálu používame v obidvoch prípadoch jeho definujúci vzťah: $t = \varphi(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, respektíve $x = \psi(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Ak vzorce pre derivovanie elementárnych funkcií budeme čítať „opačným smerom“, dostaneme vzorce pre výpočet niektorých neurčitých integrálov:

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \tag{6}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \tag{7}$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c, \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + c, \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + c, \tag{10}$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c, \tag{11}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + c, \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c, \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c, \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c, \tag{15}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)| + c. \tag{16}$$

Príklad 5. Vypočítajte integrál

$$\int \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \sin\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} \right) \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \sin\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} \right) \mathrm{d}x &\overset{(2)}{=} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{2}\,\mathrm{d}x + \int \sin\left(\frac{2x}{3}\right)\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x + \int \sin\left(\frac{2x}{3}\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(14)}{=} \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x + \int \sin\left(\frac{2x}{3}\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\arcsin x + c
\end{aligned}$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{2}\arcsin x + c$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

✈

Príklad 6. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{\log^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme metódu per partes (3):

$$\int \frac{\log^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{ll} u' = \dfrac{1}{x^2} & u = -x^{-1} \\ v = \log^3 x & v' = \dfrac{3\log^2 x}{x}\end{array}\right| \overset{(3)}{=} -\frac{\log^3 x}{x} + 3\int \frac{\log^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{ll} u' = \dfrac{1}{x^2} & u = -x^{-1} \\ v = \log^2 x & v' = \dfrac{2\log x}{x}\end{array}\right|$$
$$\overset{(3)}{=} -\frac{\log^3 x}{x} - \frac{3\log^2 x}{x} + 6\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{ll} u' = \dfrac{1}{x^2} & u = -x^{-1} \\ v = \log x & v' = \dfrac{1}{x}\end{array}\right|$$
$$\overset{(3)}{=} -\frac{\log^3 x}{x} - \frac{3\log^2 x}{x} - \frac{6\log x}{x} + 6\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{(6)}{=} -\frac{\log^3 x}{x} - \frac{3\log^2 x}{x} - \frac{6\log x}{x} - \frac{6}{x} + c.$$

✈

Príklad 7. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substitučnú metódu (4):

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} -\int -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \left|\begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{array}\right|$$
$$\overset{(4)}{=} -\int \cos t\,\mathrm{d}t \overset{(8)}{=} -\sin t + c = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

✈

Príklad 8. Vypočítajte integrál

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substitučnú metódu (5):

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{c} x = \sin(t) \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right| \overset{(5)}{=} \int \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{4}\int 4\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2(2t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4t)}{2}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{1}{8}\int (1-\cos(4t))\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \frac{1}{8}\left(\int 1\,\mathrm{d}t - \int \cos(4t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{\sin(4t)}{4} + c\right) \left|\begin{array}{c} x = \sin t \Rightarrow \\ t = \arcsin x\end{array}\right| = \frac{1}{8}\left(\arcsin x - \frac{\sin(4\arcsin x)}{4} + c\right).$$

V druhom riadku sme využili goniometrickú jednotku a vzorec pre sínus dvojnásobného uhla. V treťom riadku sme použili nasledujúcu identitu, ktorá sa pri počítaní neurčitých integrálov často vyskytuje:

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t = \frac{\cos(2t) + 1}{2}.$$

Výraz $\sin(4 \arcsin x)$ ešte môžeme upraviť:

$$\begin{aligned}
\sin(4 \arcsin x) &= 2 \sin(2 \arcsin x) \cos(2 \arcsin x) \\
&= 4 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x)(\cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x)) \\
&= 4x\sqrt{1 - x^2}(1 - x^2 - x^2) = 4x\sqrt{1 - x^2}(1 - 2x^2),
\end{aligned}$$

kde sme využili tieto vzťahy:

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

V konečnom dôsledku môžeme písať

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\left(\arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}(1 - 2x^2) + c\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\arcsin x - x\sqrt{1 - x^2} + 2x^3\sqrt{1 - x^2} + c\right).
\end{aligned}$$

✈

Príklad 9. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Tento integrál môžeme spočítať aj substitučnou metódou (4) aj metódou per partes (3):

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{c} t = \arcsin x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x \end{array} \right| \overset{(4)}{=} \int t\, \mathrm{d}t \overset{(6)}{=} \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & u = \arcsin x \\ v = \arcsin x & v' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{array} \right| \overset{(3)}{=} \arcsin^2 x - \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Ak označíme symbolom I skúmaný integrál, predošlú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$I = \arcsin^2 x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = \arcsin^2 x \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\arcsin^2 x}{2},$$

čo je ten istý výsledok ako v prípade substitučnej metódy. ✈

Príklad 10. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}\, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{c} x = \tan t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t \end{array} \right| \overset{(5)}{=} \int \frac{1}{\tan^2 t\sqrt{1 + \tan^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sin^2 t\sqrt{1 + \tan^2 t}}\, \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\sin^2 t\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}\cdot\frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \left|\begin{array}{c} s=\sin t \\ \mathrm{d}s=\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right| \overset{(4)}{=} \int \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s \overset{(6)}{=} -s^{-1}+c = -\frac{1}{\sin t}+c \\
&= -\frac{1}{\sin(\arctan x)}+c
\end{aligned}
$$

Upravme výraz $\sin(\arctan x)$:

$$
\begin{aligned}
&\sin^2(\arctan x)+\cos^2(\arctan x)=1 \quad\Rightarrow\quad \tan^2(\arctan x)+1=\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \\
&\qquad\Rightarrow\quad \cos^2(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2} \\
&\qquad\Rightarrow\quad \sin^2(\arctan x)=1-\cos^2(\arctan x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2} \\
&\qquad\Rightarrow\quad \sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

Takže v konečnom dôsledku platí

$$
\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c.
$$

Pred posledným integrovaním sme použili substitučnú metódu. Ukážme si, že sme mohli použiť aj metódu per partes:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \left|\begin{array}{ll} u'=\frac{1}{\sin^2 t} & u=-\cot t \\ v=\cos t & v'=-\sin t\end{array}\right| \overset{(3)}{=} -\frac{\cos^2 t}{\sin t}-\int \cos t\,\mathrm{d}t \overset{(8)}{=} -\frac{\cos^2 t}{\sin t}-\sin t+c \\
&\quad= \frac{-\cos^2 t-\sin^2 t}{\sin t}+c = -\frac{1}{\sin t}+c = -\frac{1}{\sin(\arctan x)}+c = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c.
\end{aligned}
$$

✈

Príklad 11. Vypočítajte integrál

$$
\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{c} x=t^2 \\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right| \overset{(5)}{=} \int 2t\arctan t\,\mathrm{d}t \left|\begin{array}{ll} u'=2t & u=t^2 \\ v=\arctan t & v'=\frac{1}{1+t^2}\end{array}\right| \overset{(3)}{=} \\
&\quad= t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t^2\arctan t-\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad= t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} t^2\arctan t-\int 1\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad\overset{(6)\text{ a }(15)}{=} t^2\arctan t-t+\arctan t+c = x\arctan\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+c.
\end{aligned}
$$

✈

Príklad 12. Vypočítajte integrál

$$
\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x.
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \arccos x \,\mathrm{d}x & \left| \begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \dfrac{x^3}{3} \\ v = \arccos x & v' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| \\
& \overset{(3)}{=} \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} x = \cos t \\ \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
& \overset{(5)}{=} \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int \frac{\cos^3 t \sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t \\
& = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int (1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{c} s = \sin t \\ \mathrm{d}s = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \overset{(4)}{=} \\
& = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int (1-s^2)\,\mathrm{d}s = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\left(s - \frac{s^3}{3}\right) + c \\
& = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) + c \\
& = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\left(\sin(\arccos x) - \frac{\sin^3(\arccos x)}{3}\right) + c
\end{aligned}
$$

Znovu si pomôžeme goniometrickou jednotkou:

$$
\begin{aligned}
\sin^2(\arccos x) + \cos^2(\arccos x) = 1 \quad & \Rightarrow \quad \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2 \\
& \Rightarrow \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

Už môžeme dopočítať hľadaný integrál:

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3}\right) + c \\
&= \frac{1}{9}\left(3x^3\arccos x - 2\sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2}\right) + c.
\end{aligned}
$$

✈

Integrácia racionálnej lomenej funkcie

Výraz $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$ a $q(x)$ sú polynómy, nazývame racionálna lomená funkcia. Ak $\mathrm{st}(p) < \mathrm{st}(q)$, potom dostáva prívlastok rýdzo lomená. Za predpokladu, že polynómy $p(x)$ a $q(x)$ nemajú spoločné korene, môžeme rýdzo lomenú racionálnu funkciu $\frac{p(x)}{q(x)}$ vyjadriť ako súčet takzvaných parciálnych zlomkov. V prvom rade musíme nájsť všetky korene menovateľa. Ak je $\alpha \in \mathbb{R}$ reálny koreň polynómu $q(x)$ násobnosti k, potom sa v tomto súčte nachádza nasledujúcich k zlomkov:

$$
\frac{A_1}{x-\alpha}, \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, \tag{$*$}
$$

kde A_i sú koeficienty, ktoré je nutné dopočítať. Predpokladajme, že $\beta \pm i\gamma$ je dvojica komplexne združených koreňov polynómu $q(x)$ násobnosti k. Buď $x^2 + bx + c$ kvadratický polynóm, ktorého korene sú práve $\beta \pm i\gamma$. Potom sa v rozklade na parciálne zlomky nachádza nasledujúcich k zlomkov:

$$
\frac{B_1 x + C_1}{x^2+bx+c}, \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+bx+c)^2}, \dots, \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}, \tag{$**$}
$$

kde B_i a C_i sú koeficienty, ktoré je nutné dopočítať. Uvedený rozklad je jednoznačný až na poradie jednotlivých zlomkov. Uveďme si postup pri integrovaní racionálnej lomenej funkcie:

- V prípade, že racionálna lomená funkcia nie je rýdzo lomená, teda $\mathrm{st}(p) \geq \mathrm{st}(q)$, uskutočníme delenie čitateľa menovateľom so zvyškom, čo nás privedie k rýdzo lomenej racionálnej funkcii.
- Uskutočníme rozklad na parciálne zlomky.
- Jednotlivé parciálne zlomky zintegrujeme.

Pozrime sa bližšie na posledný bod predošlého postupu. Zlomky $*$ sa po zavedení substitúcie $t = x - \alpha$ zintegrujú samé. Výrazy $x^2 + bx + c$ v zlomkoch $**$ rozložíme na štvorec a uskutočníme nasledujúcu lineárnu transformáciu:

$$\int \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n}\, \mathrm{d}x = \int \frac{B_n x + C_n}{((x-\beta)^2 + \gamma^2)^n}\, \mathrm{d}x \quad \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\beta}{\gamma} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\widetilde{B_n} t + \widetilde{C_n}}{(t^2+1)^n}\, \mathrm{d}t$$

$$= \widetilde{B_n} \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\, \mathrm{d}t + \widetilde{C_n} \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, \mathrm{d}t.$$

Prvý integrál vyriešime substitúciou $s = t^2 + 1$ a druhý integrál je integrál $K_n(x)$ z prednášky, ktorý je daný rekurentne:

$$K_0(x) = x, \quad K_1(x) = \arctan(x), \quad K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} K_n(x).$$

Príklad 13. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{(x-1)^3}\, \mathrm{d}x.$$

Integrand nie je rýdzo lomená funkcia, takže musíme uskutočniť delenie, aby stupeň čitateľa bol menší ako stupeň menovateľa:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - 3x + 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 1 + \frac{x^2 - 3x + 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

Posledný zlomok už je rýdzo lomená funkcia, ktorej čitateľ a menonvateľ nemajú spoločný koreň, čo znamená, že môžeme uskutočniť rozklad na parciálne zlomky. Menovateľ má trojnásobný koreň 1 preto má rozklad nasledujúci tvar:

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

kde koeficienty A, B a C musíme dopočítať. Rovnicu môžeme vynásobiť spoločným menovateľom uvedených zlomkov a potom porovnať koeficienty pri rovnakých mocninách x:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 &= A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C \\ &= Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & 1 = A & \Rightarrow & A = 1 \\ x^1: & -3 = B - 2A & \Rightarrow & B = -1 \\ x^0: & 3 = A - B + C & \Rightarrow & C = 1 \end{array}$$

Takže integrand môžeme napísať v nasledujúcom tvare:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{(x-1)^3} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Vráťme sa k integrovaniu:

$$\begin{aligned}
&\int \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{=} \int 1 \,\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{1}{x-1} \,\mathrm{d}x}_{(16)} - \underbrace{\int \frac{1}{(x-1)^2} \,\mathrm{d}x}_{\left|\substack{t=x-1\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x}\right| \rightsquigarrow \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t} + \underbrace{\int \frac{1}{(x-1)^3} \,\mathrm{d}x}_{\left|\substack{t=x-1\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x}\right| \rightsquigarrow \int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t} \\
&= x + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 14. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 7x - 4}{(x-2)(x^2-2x+2)} \,\mathrm{d}x.$$

Opäť začneme delením:

$$\begin{array}{l}
(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 7x - 4) : (x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = x \\
\underline{-(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad 3x^2 - 3x - 4
\end{array}$$

Dostali sme rovnosť

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 7x - 4}{(x-2)(x^2-2x+2)} = x + \frac{3x^2 - 3x - 4}{(x-2)(x^2-2x+2)}.$$

Venujme sa poslednému zlomku. Číslo 2 nie je koreňom čitateľa a keďže čitateľ má kladný diskriminant, zatiaľčo kvadratický polynóm v menovateli má diskriminant záporný, čitateľ a menovateľ nemajú spoločný koreň. Môžeme ho preto rozložiť na parciálne zlomky. Menovateľ má jeden reálny koreň násobnosti 1 a dva komplexne združené korene násobnosti tiež 1, takže rozklad na parciálne zlomky má tvar

$$\frac{3x^2 - 3x - 4}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2},$$

kde koeficienty A, B a C musíme dopočítať.

$$3x^2 - 3x - 4 = A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x - 2) = (A + B)x^2 + (C - 2B - 2A)x + 2A - 2C$$

$$\begin{array}{lrcl}
x^2: & 3 = A + B & & A = 1 \\
x^1: & -3 = C - 2B - 2A & \Rightarrow & B = 2 \\
x^0: & -4 = 2A - 2C & & C = 3
\end{array}$$

Integrand má teda nasledujúci tvar:

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 7x - 4}{(x-2)(x^2-2x+2)} = x + \frac{1}{x-2} + \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2}.$$

Sme pripravený spočítať integrál zo zadania:

$$\int \left(x + \frac{1}{x-2} + \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\right) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2)}{=} \underbrace{\int x \,\mathrm{d}x}_{(6)} + \underbrace{\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x}_{(16)} + \int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \int \frac{2x-2+5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{=} \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \underbrace{\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x}_{(16)} + \int \frac{5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \log\left|x^2-2x+2\right| + 5\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x \; \left| \begin{array}{c} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&\overset{(4)}{=} \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \log\left|x^2-2x+2\right| + 5\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \log\left|x^2-2x+2\right| + 5\arctan t + c \\
&= \frac{x^2}{2} + \log|x-2| + \log\left|x^2-2x+2\right| + 5\arctan(x-1) + c.
\end{aligned}
$$

✈

Príklad 15. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{x^3-3x^2+14x-9}{(x^2-2x+10)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrand je rýdzo lomená funkcia, takže sa môžeme rovno pustiť do rozkladu na parciálne zlomky. Menovateľ má dva komplexne združené korene násobnosti 2, čo znamená, že spomínaný rozklad bude mať tvar

$$\frac{x^3-3x^2+14x-9}{(x^2-2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+10} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+10)^2}.$$

Dopočítajme neznáme koeficienty:

$$
\begin{aligned}
x^3-3x^2+14x-9 &= (Ax+B)(x^2-2x+10) + Cx + D \\
&= Ax^3 + (B-2A)x^2 + (10A-2B+C)x + 10B + D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
x^3: & 1 = A & \Rightarrow & A = 1 \\
x^2: & -3 = B - 2A & \Rightarrow & B = -1 \\
x^1: & 14 = 10A - 2B + C & \Rightarrow & C = 2 \\
x^0: & -9 = 10B + D & \Rightarrow & D = 1
\end{array}
$$

Integrand má tvar

$$\frac{x^3-3x^2+14x-9}{(x^2-2x+10)^2} = \frac{x-1}{x^2-2x+10} + \frac{2x+1}{(x^2-2x+10)^2}.$$

Počítajme:

$$
\begin{aligned}
&\int \left(\frac{x-1}{x^2-2x+10} + \frac{2x+1}{(x^2-2x+10)^2} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad = \int \frac{x-1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{(x^2-2x+10)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x}_{(16)} + \int \frac{2x+1}{((x-1)^2+9)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| + \int \frac{2x+1}{81\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{3} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| + \frac{1}{27}\int \frac{6t+3}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| + \frac{1}{9}\underbrace{\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t}_{\left|\begin{smallmatrix} s=t^2+1 \\ \mathrm{d}s=2t\,\mathrm{d}t \end{smallmatrix}\right| \rightsquigarrow \int \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s} + \frac{1}{9}\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t}_{=K_2(t)} \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan t\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| - \frac{1}{(x-1)^2+9} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2+9} + \frac{1}{18}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+10\right| + \frac{1}{6}\cdot\frac{x-7}{x^2-2x+10} + \frac{1}{18}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right).
\end{aligned}
$$

✈

Príklad 16. Vypočítajte integrál

$$\int \frac{x^6-5x^5-4x^4+9x^3+138x^2-256x+289}{x(x+1)^2(x^2-8x+17)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integrand je rýdzo lomená funkcia. Menovateľ má koreň 0 násobnosti 1, koreň -1 násobnosti 2 a dva komplexne združené korene násobnosti 2, čo znamená, že spomínaný rozklad na parciálne zlomky bude mať tvar

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^6-5x^5-4x^4+9x^3+138x^2-256x+289}{x(x+1)^2(x^2-8x+17)^2} \\
&\qquad = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-8x+17} + \frac{Fx+G}{(x^2-8x+17)^2}.
\end{aligned}
$$

Po úprave dostávame

$$
\begin{aligned}
&x^6-5x^5-4x^4+9x^3+138x^2-256x+289 \\
&\quad = A(x+1)^2(x^2-8x+17)^2 + Bx(x+1)(x^2-8x+17)^2 + Cx(x^2-8x+17)^2 \\
&\quad + (Dx+E)x(x+1)^2(x^2-8x+17) + (Fx+G)x(x+1)^2
\end{aligned}
$$

Ak za x dosadíme 0, dostaneme $289 = 17^2A$, teda $A = 1$. Dosadením -1 za x sa pre zmenu dopracujeme k $-26^2C = 676$, teda $C = -1$. Dosaďme a pokračujme ďalej.

$$
\begin{aligned}
&10x^5-87x^4+199x^3+23x^2-273x \\
&\quad = Bx(x+1)(x^2-8x+17)^2 + (Dx+E)x(x+1)^2(x^2-8x+17) + (Fx+G)x(x+1)^2
\end{aligned}
$$

Rovnicu vydelíme polynómom x:

$$
\begin{aligned}
&10x^4-87x^3+199x^2+23x-273 \\
&\quad = B(x+1)(x^2-8x+17)^2 + (Dx+E)(x+1)^2(x^2-8x+17) + (Fx+G)(x+1)^2
\end{aligned}
$$

Polynóm na ľavej strane rovnosti musí byť deliteľný polynómom $x+1$:

	10	−87	199	23	−273
−1	10	−97	296	−273	0

Takže po vydelení polynómom $x + 1$ dostávame rovnicu

$$\begin{aligned}&10x^3 - 97x^2 + 296x - 273\\ &\qquad = B(x^2 - 8x + 17)^2 + (Dx + E)(x + 1)(x^2 - 8x + 17) + (Fx + G)(x + 1)\end{aligned}$$

Ak za x znovu dosadíme -1, dopočítame koeficient B: $26^2 B = -676$, takže $B = -1$. Po úprave dostaneme

$$x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x + 16 = (Dx + E)(x + 1)(x^2 - 8x + 17) + (Fx + G)(x + 1).$$

Znovu môžeme použiť Hornerovu schému:

	1	−6	1	24	16
−1	1	−7	8	16	0

Takže po vydelení poslednej rovnice polynómom $x + 1$ dostaneme

$$\begin{aligned}x^3 - 7x^2 + 8x + 16 &= (Dx + E)(x^2 - 8x + 17) + (Fx + G)\\ &= Dx^3 + (E - 8D)x^2 + (17D - 8E + F)x + 17E + G.\end{aligned}$$

Zvyšné koeficienty môžeme dopočítať vyriešením príslušných lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}x^3 :&\quad 1 = D &&\Rightarrow\quad D = 1\\ x^2 :&\quad -7 = E - 8D &&\Rightarrow\quad E = 1\\ x^1 :&\quad 8 = 17D - 8E + F &&\Rightarrow\quad F = -1\\ x^0 :&\quad 16 = 17E + G &&\Rightarrow\quad G = -1\end{aligned}$$

Konečne sme našli rozklad integrandu na parciálne zlomky:

$$\begin{aligned}&\frac{x^6 - 5x^5 - 4x^4 + 9x^3 + 138x^2 - 256x + 289}{x(x+1)^2(x^2 - 8x + 17)^2}\\ &\qquad = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2 - 8x + 17} + \frac{-x-1}{(x^2 - 8x + 17)^2}.\end{aligned}$$

Prejdime k integrovaniu:

$$\begin{aligned}&\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2 - 8x + 17} + \frac{-x-1}{(x^2 - 8x + 17)^2}\right) \mathrm{d}x\\ &\quad \overset{(2)}{=} \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{x^2 - 8x + 17}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x-1}{(x^2 - 8x + 17)^2}\,\mathrm{d}x\\ &\quad = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x - 8 + 10}{x^2 - 8x + 17}\,\mathrm{d}x}_{(16)} - \underbrace{\int \frac{x - 4 + 5}{((x-4)^2 + 1)^2}\,\mathrm{d}x}_{\left|\substack{t = x-4\\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x}\right|}\\ &\quad = \underbrace{\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log\left|x^2 - 8x + 17\right|}_{=f(x)} + \frac{1}{2}\int \frac{10}{x^2 - 8x + 17}\,\mathrm{d}x - \int \frac{t+5}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &\quad = f(x) + 5\underbrace{\int \frac{1}{(x-4)^2 + 1}\,\mathrm{d}x}_{\left|\substack{t = x-4\\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x}\right| \rightsquigarrow \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t}_{\left|\substack{s = t^2+1\\ \mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t}\right|} - 5\underbrace{\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t}_{=K_2(t)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x) + 5\arctan(x-4) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s - 5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan t\right) + c \\
&= f(x) + \frac{5}{2}\arctan(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{5}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + c \\
&= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log\left|x^2-8x+17\right| + \frac{5}{2}\arctan(x-4) + \frac{1}{2}\cdot\frac{-5x+21}{(x-4)^2+1} + c
\end{aligned}
$$

✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÝ, Ondřej a ZEMÁNEK, Petr. *Integrální počet v* $\mathbb{R}$