MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 7. cvičenie, 18.11.2020

Diferenciálne rovnice

Diferenciálna rovnica $y' = f(x)g(y)$ sa nazýva rovnica so separovanými premennými. Ak $G(y)$ je primitívna funkcia k funkcii $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, potom rovnica

$$G(y) = F(x) + c$$

implicitne zadáva riešenie $y = y(x)$ diferenciálnej rovnice $y' = f(x)g(y)$. Tento postup riešenia sa dá symbolicky naznačiť použitím značenia $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pri delení funkciou $g(y)$ overíme, či rovnosť $g(y) = 0$ neurčuje konštantné riešenia danej diferenciálnej rovnice.

Ak má pravá strana diferenciálnej rovnice $y' = F(x, y)$ tvar $F(x, y) = f(\frac{y}{x})$, použijeme substitúciu $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, teda $y(x) = z(x)x$. Pre deriváciu platí $y' = z'x + z$. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad z'x + z = f(z) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

čo je rovnica so separovanými premennými.

Diferenciálna rovnica $y' = f(x)y + g(x)$ sa nazýva lineárna diferenciálna rovnica. Člen $f(x)y$ hodíme na druhú stranu a rovnicu vynásobíme funkciou $\mathrm{e}^{F(x)}$, kde $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $-f(x)$, vďaka čomu sa z pravej strany stane derivácia súčinu:

$$\begin{aligned} y' = f(x)y + g(x) \quad &\Rightarrow \quad y' - f(x)y = g(x) \quad \Rightarrow \quad y'\mathrm{e}^{F(x)} - f(x)y\mathrm{e}^{F(x)} = g(x)\mathrm{e}^{F(x)} \\ &\Rightarrow \quad (y\mathrm{e}^{F(x)})' = g(x)\mathrm{e}^{F(x)} \end{aligned}$$

Obidve strany rovnice zintegrujeme, čo nás privedie k riešeniu:

$$(y\mathrm{e}^{F(x)})' = g(x)\mathrm{e}^{F(x)} \quad \Rightarrow \quad y\mathrm{e}^{F(x)} = \int g(x)\mathrm{e}^{F(x)}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{e}^{-F(x)} \cdot \int g(x)\mathrm{e}^{F(x)}\,\mathrm{d}x$$

Namiesto $\mathrm{e}^{F(x)}$ budeme menej formálne písať $\mathrm{e}^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Rovnica $y' = f(x)y + g(x)y^r$, kde $r \neq 0, 1$, sa nazýva Bernoulliho rovnica. Túto rovnicu vyriešime zavedením substitúcie $u(x) = y(x)^{1-r}$. Pre deriváciu platí $u' = (1-r)\frac{y'}{y^r}$. Pôvodnú rovnicu vynásobíme výrazom $\frac{1-r}{y^r}$ a premennú y nahradíme premennou u:

$$y' = f(x)y + g(x)y^r \;\Rightarrow\; (1-r)\frac{y'}{y^r} = (1-r)(f(x)y^{1-r} + g(x)) \;\Rightarrow\; u' = (1-r)(f(x)u + g(x)).$$

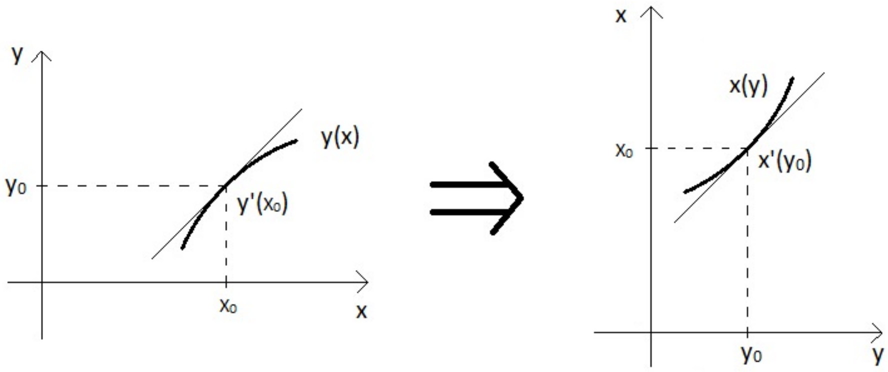
To je lineárna diferenciálna rovnica, ktorú už vieme vyriešiť.

Niekedy nám k vyriešeniu dopomôže zámena premenných, čo znamená, že x budeme chápať ako funkciu premennej y. Ak $y'(x) = F(x, y(x)) \neq 0$, môžeme danú rovnicu prevrátiť a podľa pravidla pre deriváciu inverznej funkcie odvodiť diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $x(y)$:

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{F(x, y(x))} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'(x(y))} = \frac{1}{F(x(y), y)}$$

$$\Rightarrow \quad x'(y) = \frac{1}{F(x(y), y)} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{1}{F(x, y)}$$

Funkcia $\frac{1}{F(x,y)}$ môže mať, narozdiel od funkcie $F(x, y)$, niektorý z už študovaných tvarov.



Príklad 1. Nájdite všeobecné riešenie a partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(-1) = 2$ rovnice

$$y' = \frac{y-1}{x^2 y^2}.$$

Uvedená rovnica je rovnicou so separovanými premennými. Stačí nám na jednu stranu rovnice premiestniť premennú y, na druhú stranu premennú x a obidve strany rovnice podľa príslušných premenných zintegrovať:

$$y' = \frac{y-1}{x^2 y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x^2}\frac{y-1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{y-1} y' = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{y-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Keďže platí

$$\frac{y^2}{y-1} = y + 1 + \frac{1}{y-1},$$

môžeme sa pustiť do integrovania:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int \left(y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + y + \log|y-1| + c$$
$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + c.$$

To znamená, že riešenie je pre každé $c \in \mathbb{R}$ implicitne určené rovnicou

$$\frac{y^2}{2} + y + \log|y-1| = -\frac{1}{x} + c.$$

Navyše pri úprave pôvodnej diferenciálnej rovnice sme delili výrazom $y-1$, pričom sme predpokladali jeho nenulovosť. Všimnime si, že rovnosť $y(x) = 1$ určuje tiež riešenie študovanej rovnice. To však nedostaneme žiadnou konkrétnou voľbou integračnej konštanty v rovnici vyššie. Preto má všeobecné riešenie tvar

$$\boxed{y = 1,\ \frac{y^2}{2} + y + \log|y-1| = -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}}$$

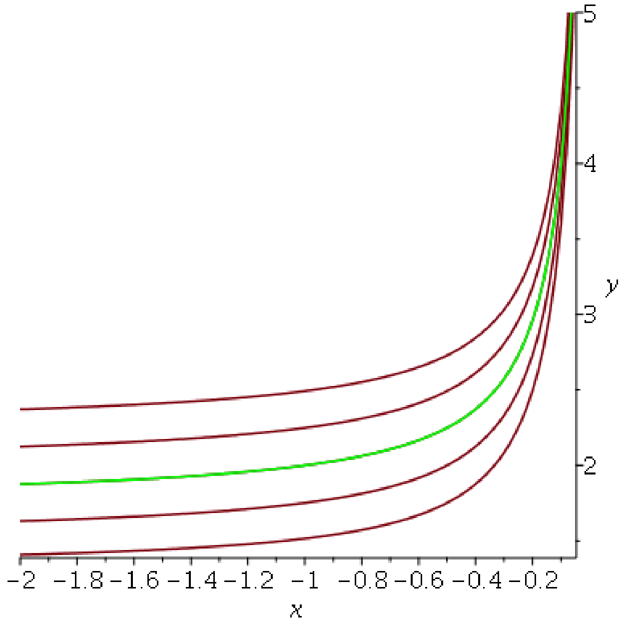
Ak chceme nájsť riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(-1) = 2$, dosadíme do poslednej rovnice $x = -1$ a $y = 2$ a dopočítame konštantu c:

$$\frac{2^2}{2} + 2 + \log|2 - 1| = -\frac{1}{-1} + c \quad \Rightarrow \quad 2 + 2 + 0 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(-1) = 2$ je implicitne určené rovnicou

$$\frac{y^2}{2} + y + \log|y - 1| = -\frac{1}{x} + 3.$$

✈



Obr. 1: Príklad 1

Príklad 2. Nájdite všeobecné riešenie a partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ rovnice

$$xy' - y = x \tan\frac{y}{x}.$$

Po vydelení rovnice premennou x uvidíme, že sa jedná o rovnicu homogénnu:

$$xy' - y = x \tan\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}.$$

Zavedieme substitúciu $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, teda $y(x) = u(x)x$. Pre deriváciu funkcie y podľa pravidla pre derivovanie súčinu platí $y' = u'x + u$. Dosaďme do pôvodnej rovnice:

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad u'x + u = u + \tan u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\tan u}{x}.$$

To je opäť rovnica so separovanými premennými:

$$u' = \frac{\tan u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\tan u}u' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\tan u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\tan u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

Integrujme:

$$\int \frac{1}{\tan u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u \left| \begin{array}{c} s = \sin u \\ \mathrm{d}s = \cos u\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \log|x| + c$$

$$\int \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \log|x| + c$$

$$\log|\sin u| = \log|s| = \log|x| + c$$

$$|\sin u| = \mathrm{e}^{\log|x|+c} = |x|\,\mathrm{e}^{c} \qquad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad k = \mathrm{e}^{c} \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\left|\sin\frac{y}{x}\right| = k\,|x|\,, \qquad k \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\sin\frac{y}{x} = \pm kx, \qquad k \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\sin\frac{y}{x} = Kx, \qquad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vráťme sa ešte k prvej úprave v $(*)$. Tam sme predpokladali, že

$$\tan u \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad y = k\pi x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

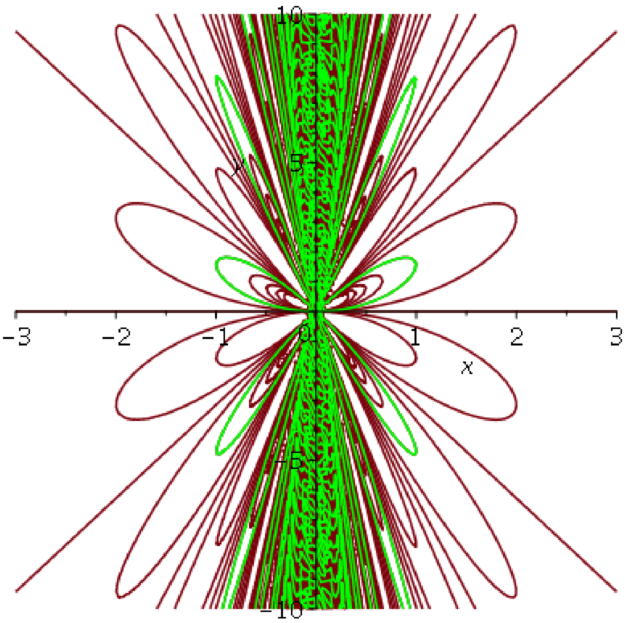
Pri takýchto úpravách sa často stáva, že práve takto vylúčená funkcia $y(x)$ je tiež riešením uvažovanej rovnice. Zistime, či to platí aj v našom prípade:

$$x(k\pi x)' - k\pi x = xk\pi - k\pi x = 0 = x\tan k\pi = x\tan\frac{k\pi x}{x}.$$

Tieto funkcie však môžeme zahrnúť do nami nájdeného riešenia $\sin\frac{y}{x} = Kx$, $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tým, že povolíme aj nulové hodnoty konštanty K. Pre každé $c \in \mathbb{R}$ je preto rovnicou

$$\boxed{\sin\frac{y}{x} = cx}$$

implicitne určené riešenie diferenciálnej rovnice zo zadania. Partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ je implicitne určené rovnicou $\sin\frac{y}{x} = \sqrt{3}\cdot x$. ✈



Obr. 2: Príklad 2

Príklad 3. Nájdite všeobecné riešenie a partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(0) = 0$ rovnice
$$y' = 2x(x^2 + y).$$

Evidentne sa jedná o lineárnu diferenciálnu rovnicu:

$$y' = 2x(x^2 + y) \quad \Leftrightarrow \quad y' = 2x^3 + 2xy \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2xy = 2x^3.$$

Ďalej túto rovnicu vynásobíme integračným faktorom

$$\mathrm{e}^{\int -2x \, \mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

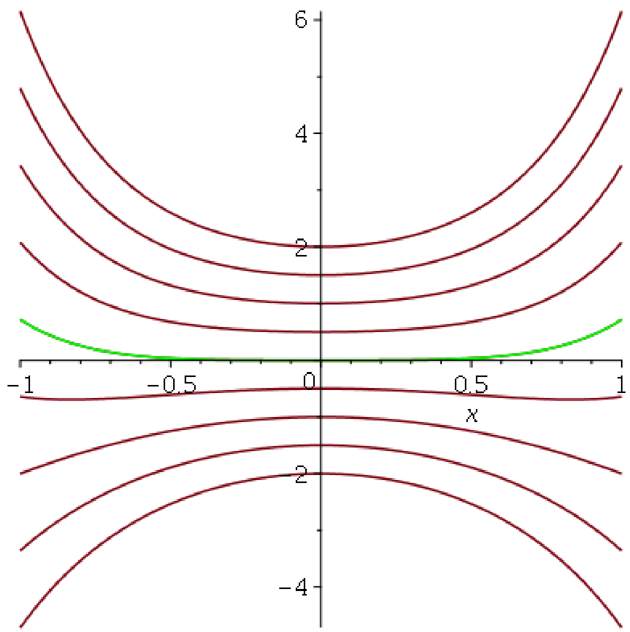
To nás privedie k

$$\begin{aligned}
y'\mathrm{e}^{-x^2} - 2xy\mathrm{e}^{-x^2} &= 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} \\
(y\mathrm{e}^{-x^2})' &= 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} \\
y\mathrm{e}^{-x^2} &= \int 2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{cc} u' = \mathrm{e}^{-t} & u = -\mathrm{e}^{-t} \\ v = t & v' = 1 \end{array} \right| \\
&= -t\mathrm{e}^{-t} + \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + c = -x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + c \\
&\boxed{y = -x^2 - 1 + c\mathrm{e}^{x^2}.}
\end{aligned}$$

Partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(0) = 0$ nájdeme dosadením $x = 0$ a $y = 0$ a dopočítaním konštanty c:

$$0 = -0^2 - 1 + c\mathrm{e}^{0^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = -1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Hľadané riešenie je $y = -x^2 - 1 + \mathrm{e}^{x^2}$. ✈



Obr. 3: Príklad 3

Príklad 4. Nájdite všeobecné riešenie a partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(0) = 1$ rovnice
$$y' = -2y + y^2\mathrm{e}^x.$$

Uvedená rovnica je Bernoulliho, takže použijeme substitúciu $u = y^{1-2} = y^{-1}$. Pre deriváciu platí $u' = -\frac{y'}{y^2}$. Vynásobme uvažovanú diferenciálnu rovnicu výrazom $-\frac{1}{y^2}$ a prejdime k novej premennej u:

$$y' = -2y + y^2\mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - \mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad u' = 2u - \mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad u' - 2u = -\mathrm{e}^x. \qquad (*)$$

Dostali sme sa k lineárnej diferenciálnej rovnici. Tú vynásobíme integračným faktorom
$$\mathrm{e}^{\int -2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x}.$$

To nás privedie k

$$\begin{aligned}
u'\mathrm{e}^{-2x} - 2u\mathrm{e}^{-2x} &= -\mathrm{e}^{-x}\\
(u\mathrm{e}^{-2x})' &= -\mathrm{e}^{-x}\\
u\mathrm{e}^{-2x} &= \int -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x} + c\\
u &= \mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{2x}\\
\frac{1}{y} &= \mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Opäť sme pri úpravách v rovnici $(*)$ a vôbec pri zavedení substitúcie $u = \frac{1}{y}$ predpokladali, že $y \neq 0$. Avšak po dosadení do diferenciálnej rovnice zo zadania zistíme, že aj funkcia $y(x) = 0$ je jej riešením. Preto má všeobecné riešenie tejto rovnice tvar

$$\boxed{\frac{1}{y} = \mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{2x},\ c \in \mathbb{R},\ y = 0.}$$

Partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(0) = 1$ má tvar $y = \mathrm{e}^{-x}$. ✈

Príklad 5. Nájdite všeobecné riešenie a partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(\frac{1}{2}) = 1$ rovnice
$$2y + (y^2 - 6x)y' = 0.$$

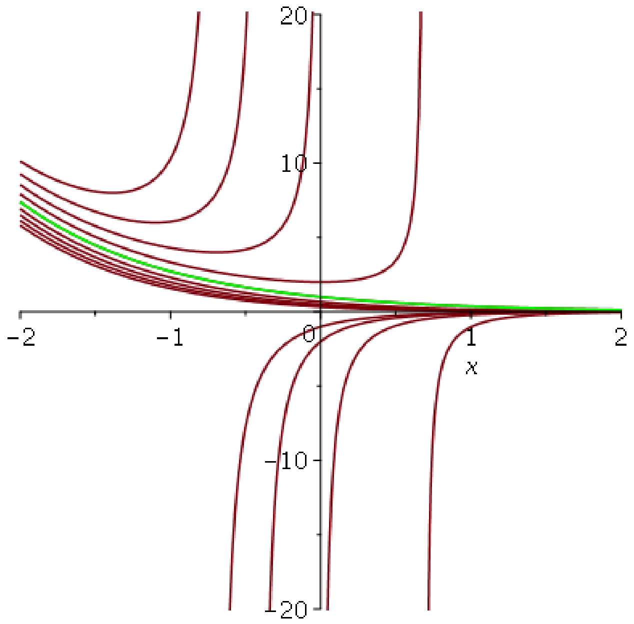
Po úprave zistíme, že rovnica nemá žiadny z doteraz uvedených špeciálnych tvarov:

$$2y + (y^2 - 6x)y' = 0 \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{-2y}{y^2 - 6x}.$$

Uskutočníme zámenu premenných. Premennú x budeme chápať ako závislú premennú, teda ako funkciu premennej y: $x = x(y)$. Prevrátime obidve strany rovnice, čo nám na ľavej strane vytvorí deriváciu x':
$$x'(y) = \frac{1}{y'(x(y))} = \frac{y^2 - 6x(y)}{-2y}.$$

Tiež sa táto operácia zvykne zapisovať symbolicky

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2y}{y^2 - 6x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y^2 - 6x}{-2y} \quad\Rightarrow\quad x' = \frac{y^2 - 6x}{-2y} \quad\Rightarrow\quad x' = 3\frac{x}{y} - \frac{y}{2}$$



Obr. 4: Príklad 4

$$\Rightarrow \quad x' - 3\frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}.$$

Táto úprava nás priviedla k lineárnej diferenciálnej rovnici. Musíme mať na pamäti, že odteraz je x závislá premenná a y je nezávislá premenná. Rovnicu vynásobíme integračným faktorom

$$\mathrm{e}^{\int -\frac{3}{y}\,\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-3\log y} = \mathrm{e}^{\log\frac{1}{y^3}} = \frac{1}{y^3}.$$

Po tejto úprave dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{x'}{y^3} - \frac{3x}{y^4} &= -\frac{1}{2y^2}\\
\left(\frac{x}{y^3}\right)' &= -\frac{1}{2y^2}\\
\frac{x}{y^3} &= \int -\frac{1}{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2y} + c\\
&\boxed{x = \frac{y^2}{2} + cy^3.}
\end{aligned}$$

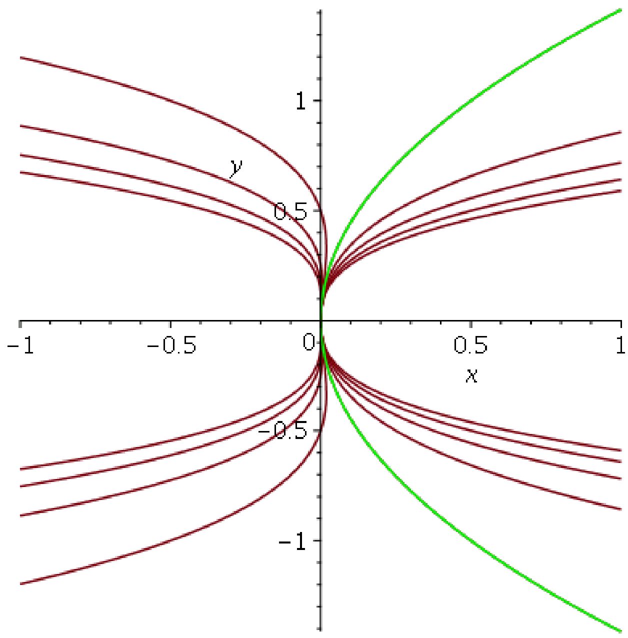
Partikulárne riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $y(\frac{1}{2}) = 1$ je implicitne zadané rovnicou:

$$x = \frac{y^2}{2}.$$

✈

Aplikácie

Príklad 6. Vypočítajte maximálnu rýchlosť padajúceho predmetu s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Predpokladajte, že sila, ktorou pôsobí vzduch na padajúce teleso proti smeru jeho pohybu je priamo úmerná druhej mocnine jeho rýchlosti. Ak predmet padá z dostatočne veľkej výšky, ustáli sa jeho rýchlosť na nejakej hodnote? Ak áno, má na túto hodnotu vplyv počiatočná rýchlosť?



Obr. 5: Príklad 5

Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona je súčet síl pôsobiacich na teleso rovný súčinu hmotnosti a zrýchlenia tohto telesa. V našej situácii na teleso pôsobia dve sily - gravitačná, ktorej veľkosť je mg, kde m je hmotnosť telesa a g je gravitačné zrýchlenie, a sila ktorou pôsobí okolitý vzduch proti smeru pohybu tohto telesa. Podľa predpokladov je veľkosť tejto sily kv^2, kde k je kladná reálna konštanta a $v = v(t)$ je veľkosť rýchlosti telesa v čase t. Vzhľadom k tomu, že tieto sily pôsobia na teleso v navzájom opačných smeroch, platí

$$mv' = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad v' = g - \frac{k}{m}v^2.$$

To je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, ktorú vieme ľahko vyriešiť:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \int 1\,\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Integrujme:

$$\begin{aligned} t + c &= \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{g}\int \frac{1}{1 - \frac{k}{gm}v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2g}\int \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{gm}{k}}\left(-\int \frac{-\sqrt{\frac{k}{gm}}}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v + \int \frac{\sqrt{\frac{k}{gm}}}{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\left(-\log\left|1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v\right| + \log\left|1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v\right|\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\right| \end{aligned}$$

Povedzme, že počiatočná rýchlosť v čase 0 bola v_0: $v(0) = v_0$.[1] Uvedomme si, že konkrétna voľba počiatočnej rýchlosti v_0 zodpovedá konkrétnej voľbe integračnej konštanty c:

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v_0}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v_0}\right|$$

[1]Pripomeňme, že náš model platí len pre $v_0 > 0$.

Zatiaľ sme našli len implicitné vyjadrenie riešenia uvažovanej diferenciálnej rovnice. V tomto prípade sa však funkcia $v(t)$ dá vyjadriť explicitne. Výpočet rozdelíme na dva prípady:

- $1-\sqrt{\frac{k}{gm}}v_0 > 0$

$$\Rightarrow\ t+c=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left(\frac{1+\sqrt{\frac{k}{gm}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{gm}}v}\right)\ \Rightarrow\ v(t)=\frac{\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)-1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(1+\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\right)} \tag{1}$$

- $1-\sqrt{\frac{k}{gm}}v_0 < 0$

$$\Rightarrow\ t+c=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left(\frac{1+\sqrt{\frac{k}{gm}}v}{\sqrt{\frac{k}{gm}}v-1}\right)\ \Rightarrow\ v(t)=\frac{\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)+1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)-1\right)} \tag{2}$$

Funkcia $v(t)=\sqrt{\frac{gm}{k}}$ je tiež riešením, ktoré sa nám opäť stratilo pri delení rovnice výrazom $g-\frac{k}{m}v^2$ v $(*)$. V každom z uvedených prípadov platí

$$\lim_{t\to\infty} v(t)=\sqrt{\frac{gm}{k}}.$$

To znamená, že rýchlosť padajúceho predmetu sa po čase skutočne ustáli na nejakej hodnote. Táto hodnota závisí len od jeho hmotnosti, veľkosti a tvaru a parametroch prostredia, teda nie od jeho počiatočnej rýchlosti. Za predpokladu nulovej počiatočnej rýchlosti má rýchlosť v čase t veľkosť

$$v(t)=\frac{\exp\left(2t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)-1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(1+\exp\left(2t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\right)}$$

Vyšetrime priebeh funkcie $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$. Jej derivácia má tvar

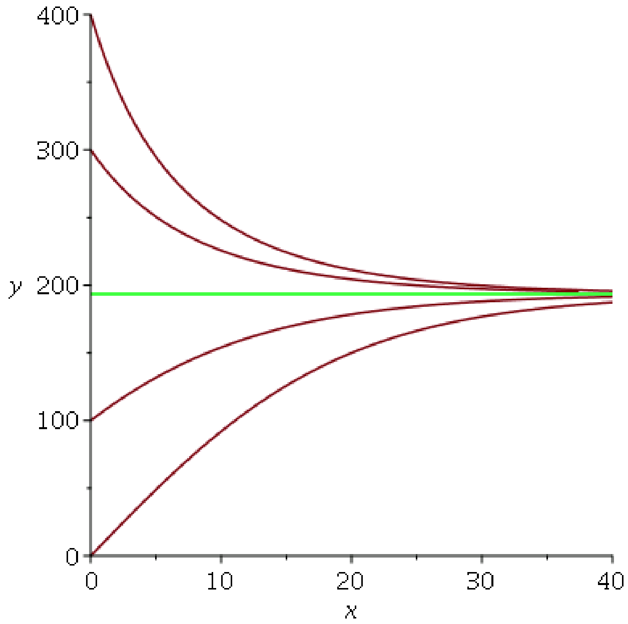
$$f'(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)'=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)-(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Tá je všade kladná, čo znamená, že funkcia $f(x)$ je na celom $\mathbb{R}$ rastúca. Funkcia $v(t)$ preto monotónne konverguje k hodnote $\sqrt{\frac{gm}{k}}$. To znamená, že rýchlosť voľného pádu je pri nulovej počiatočnej rýchlosti zhora ohraničená hodnotou $\sqrt{\frac{gm}{k}}$. ✈

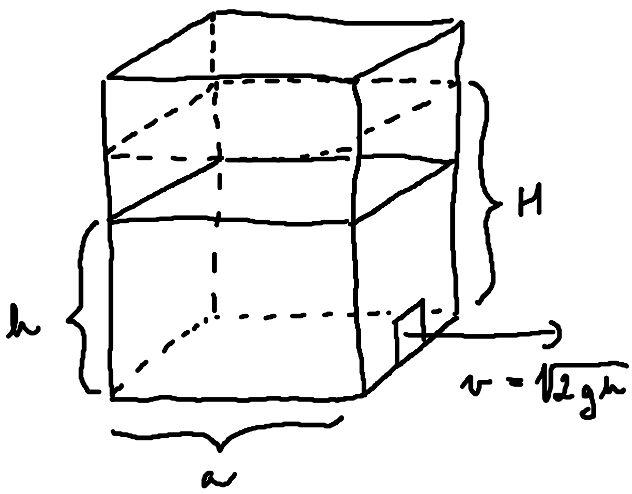
Príklad 7. Nádoba tvaru hranola so šírkou a je naplnená do výšky H vodou. Na jej spodku je na bočnej stene otvor s plochou S, cez ktorý voda vyteká. Podľa Torricelliho zákona je rýchlosť v častíc vytekajúcej vody závislá od výšky hladiny h, konkrétne $v=\sqrt{2gh}$. Určte výšku vodnej hladiny v čase t, špeciálne, nájdite čas, za ktorý sa nádrž vyprázdni.

Predpokladajme, že voda začala vytekať v čase $t=0$, teda $h(0)=H$. Nech $t_1,t_2>0$ sú ľubovoľné okamihy a $h_1=h(t_1)$ a $h_2=h(t_2)$ výšky vodnej hladiny v nádobe v daných časoch. Objem, ktorý za daný čas z nádoby zmizne, je ten istý objem, ktorý za tento čas z nádoby vytečie rýchlosťou v cez prierez s plochou S:

$$a^2(h_1-h_2)=\int_{t_1}^{t_2} Sv\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2} S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t.$$



Obr. 6: Príklad 6



Obr. 7: Príklad 7

Túto rovnosť vydelíme výrazom $t_2 - t_1$, uskutočníme limitný prechod $\lim_{t_2 \to t_1}$ a prepíšeme t_1 na t:

$$-\frac{a^2(h_2 - h_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_2 \to t_1]{\lim} -a^2 h'(t_1) = S\sqrt{2gh(t_1)} \Rightarrow -a^2 h'(t) = S\sqrt{2gh(t)}.$$

Dostali sme sa k diferenciálnej rovnici so separovanými premennými, ktorú hravo vyriešime:

$$-a^2 h' = S\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad -a^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = S\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \int \frac{-S\sqrt{2g}}{a^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{S\sqrt{2g}}{a^2} t + c.$$

Vzhľadom k tomu, že $h(0) = H$, dostávame

$$2\sqrt{H} = c \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{h(t)} = -\frac{S\sqrt{2g}}{a^2} t + 2\sqrt{H} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{S\sqrt{2g}}{2a^2} t\right)^2.$$

Čas t, za ktorý sa nádrž úplne vyprázdni je riešením rovnice $h(t) = 0$:

$$0 = 2\sqrt{H} - \frac{S\sqrt{2g}}{a^2}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2a^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}.$$

✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy II*, `http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] RÁB, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*