MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 8. cvičenie, 25.11.2020

Funkcie viacerých premenných

Príklad 1. Nájdite definičný obor funkcie

$$\arcsin\left(\frac{x-y+1}{x+y-2}\right).$$

Musíme zaistiť splnenie nasledujúcich dvoch podmienok:

$$-1 \leq \frac{x-y+1}{x+y-2} \leq 1, \qquad x+y-2 \neq 0.$$

Začnime prvou z nich:

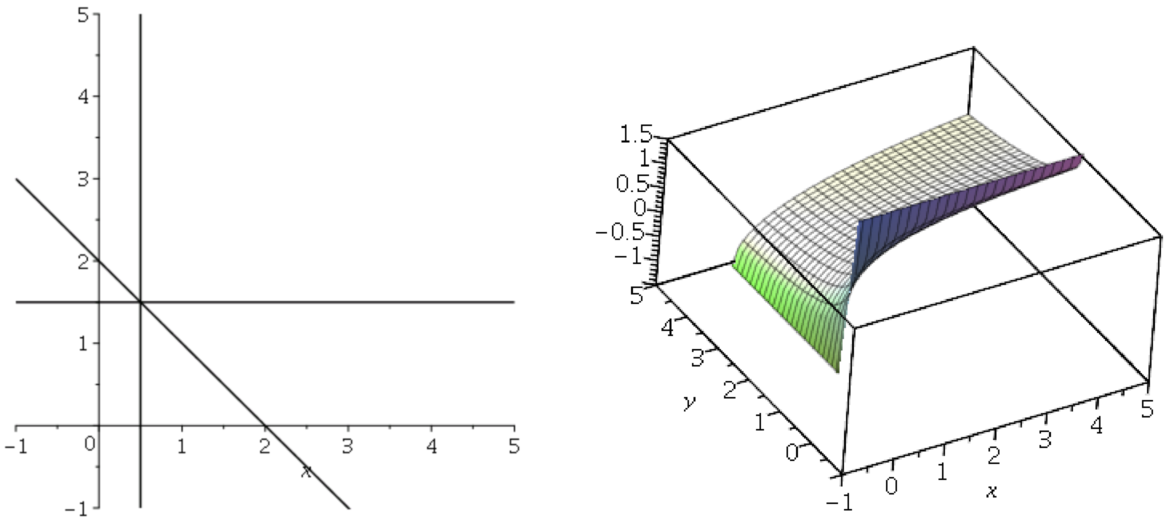
$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x-y+1}{x+y-2} \quad &\Leftrightarrow \quad -x-y+2 \leq x-y+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x, \\ \frac{x-y+1}{x+y-2} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x-y+1 \leq x+y-2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \leq y. \end{aligned}$$

Pozrime sa, ktoré dvojice (x,y) porušujú druhú podmienku:

$$x+y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=-x+2.$$

Všimnime si, že bod $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ spĺňa poslednú rovnicu. Keďže normálový vektor $(1,1)$ priamky $y=-x+2$ smeruje do množiny $\{(x,y) \mid \frac{1}{2} \leq x, \frac{3}{2} \leq y\}$, majú tieto dve množiny jediný spoločný bod, ktorým je $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$. To znamená, že definičný obor funkcie $f(x,y)$ je

$$D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x,\ \frac{3}{2} \leq y\right\} \setminus \left\{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\right\}.$$ ✈



Obr. 1: Príklad 1

Príklad 2. Nájdite definičný obor funkcie

$$f(x,y)=\sqrt{(-4x^2+24x-y^2-32)(4y^2-x^2+6x-13)}.$$

Druhá odmocnina je definovaná len pre nezáporné čísla. Preto musia mať zátvorky pod odmocninou rovnaké znamienko, alebo aspoň jedna z nich musí byť nulová. Definičný obor funkcie $f(x,y)$ je tým pádom určený disjunkciou nasledujúcich dvoch podmienok:

1. $-4x^2+24x-y^2-32\le 0$ & $4y^2-x^2+6x-13\le 0$,

2. $-4x^2+24x-y^2-32\ge 0$ & $4y^2-x^2+6x-13\ge 0$.

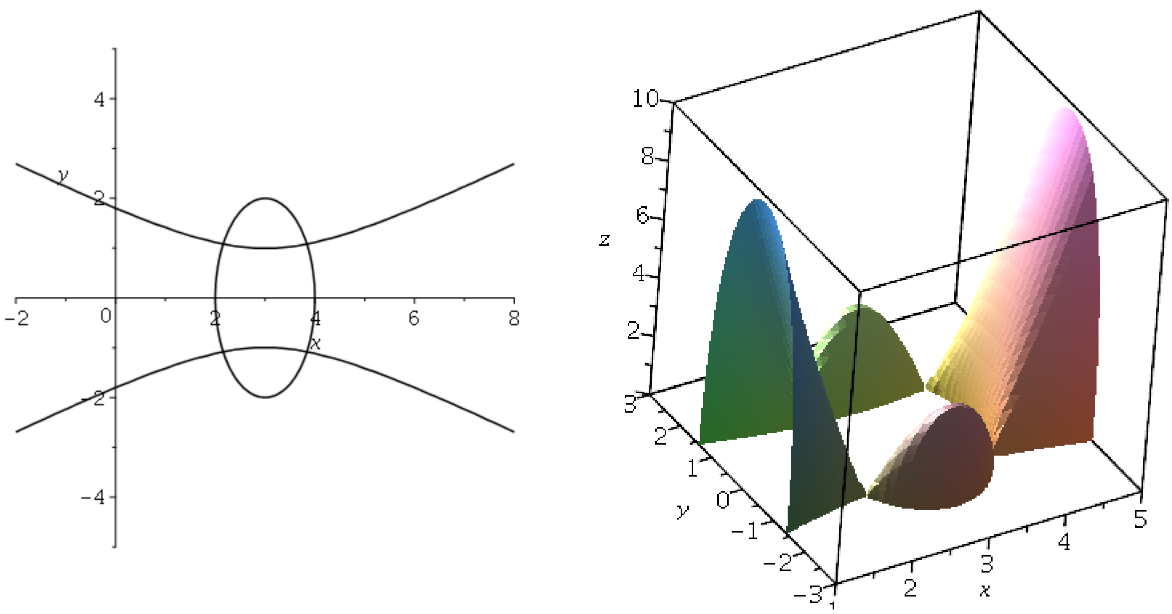
Každá z rovností $-4x^2+24x-y^2-32=0$ a $4y^2-x^2+6x-13=0$ definuje krivku rozdeľujúcu rovinu $\mathbb{R}^2$ na niekoľko častí, podľa toho, či daný bod (x,y) spĺňa nerovnosť $>$ alebo $<$. Preto sa pokúsime tieto krivky charakterizovať:

$$\begin{aligned}-4x^2+24x-y^2-32=0 \quad&\Leftrightarrow\quad -4(x^2-6x+8)-y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad -4((x-3)^2-1)-y^2=0\\ &\Leftrightarrow\quad -4(x-3)^2-y^2=-4 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)^2+\frac{y^2}{4}=1.\end{aligned}$$

Prvá rovnosť teda určuje elipsu so stredom v bode $[3,0]$, ktorej poloosi majú dĺžky 1 a 2. Nerovnosť$-4x^2+24x-y^2-32\ge 0$ spĺňajú body v jej vnútri a na obvode a naopak nerovnosti $-4x^2+24x-y^2-32\le 0$ vyhovojú body naokolo tejto elipsy a opäť na jej obvode.

$$\begin{aligned}4y^2-x^2+6x-13=0 \quad&\Leftrightarrow\quad 4y^2-(x^2-6x+13)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4y^2-((x-3)^2+4)=0\\ &\Leftrightarrow\quad 4y^2-(x-3)^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad y^2-\frac{(x-3)^2}{4}=1.\end{aligned}$$

Druhá rovnosť určuje hyperbolu so stredom v bode $[3,0]$. Vrcholy jej vetiev sa nachádzajú v bodoch $[3,1]$ a $[3,-1]$. Dosadením bodu $[3,0]$ do výrazu $4y^2-x^2+6x-13$ dostaneme číslo -4, čo znamená, že body medzi vetvami hyperboly spĺňajú nerovnosť $4y^2-x^2+6x-13\le 0$, zataľčo tie ostatnú spĺňajú opačnú nerovnosť. ✈

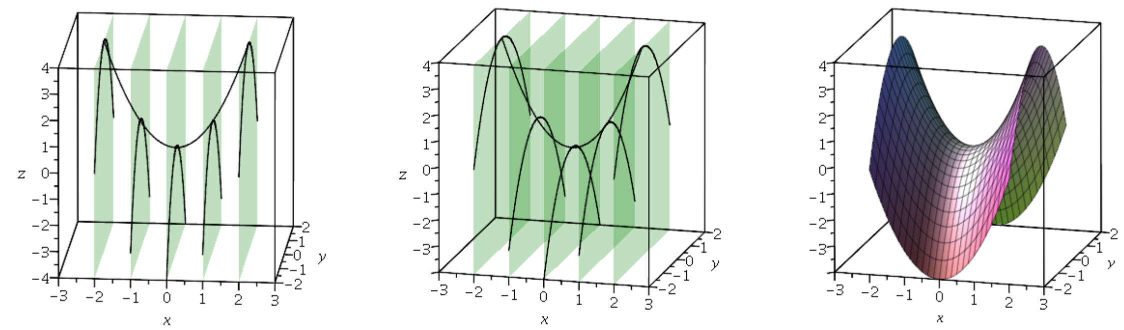


Obr. 2: Príklad 2

Príklad 3. Pomocou rezov rôznymi rovinami načrtnite graf funkcie

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Graf funkcie budeme rezať rovinami $x = x_0$. Pre pevne zvolené $x = x_0 \in \mathbb{R}$ určuje predpis $f(x_0, y) = x_0^2 - y^2$ funkciu jednej premennej, ktorej graf je prienikom roviny $x = x_0$ a grafu funkcie $f(x,y)$. Graf funkcie $f(x_0, y) = x_0^2 - y^2$ vieme jednoducho nakresliť, je to prevrátená parabola, ktorej vrchol je posunutý do bodu x_0^2. Vrcholy týchto parabol teda v rovine $y = 0$ tvoria opäť parabolu $z = x^2$. Ak zjednotíme grafy funkcií $f(x_0, y)$, z ktorých každý leží v rovine $x = x_0$, dostaneme graf funkcie $f(x,y)$: ✈



Obr. 3: Príklad 3

Príklad 4. Pomocou vrstevníc načrtnite graf funkcie

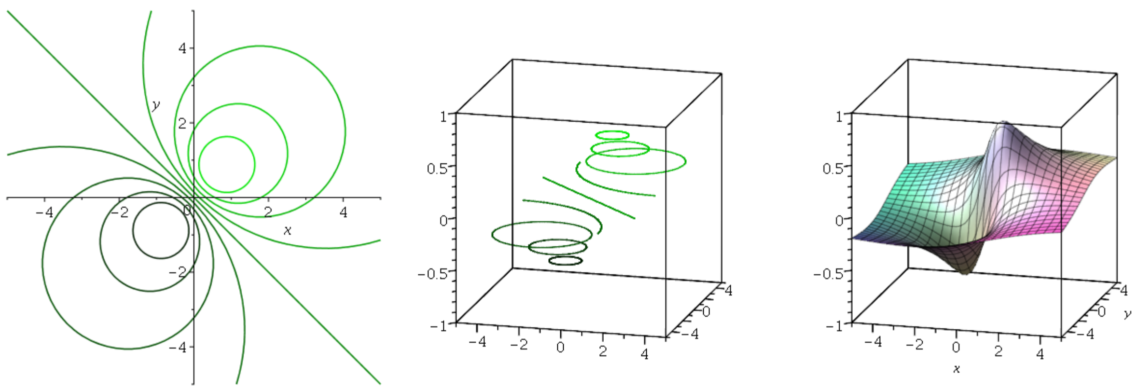
$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

Vrstevnica funkcie f na úrovni $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{(x,y) \in D(f) \mid f(x,y) = c\}$. V prípade, že $c = 0$, má vrstevnica funkcie f tvar $y = -x$. Ďalej predpokladajme, že $c \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{1+x^2+y^2} &= c, \\
x + y &= c(1 + x^2 + y^2), \\
c\left(x^2 - \frac{x}{c}\right) + c\left(y^2 - \frac{y}{c}\right) &= -c, \\
c\left(\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2}\right) + c\left(\left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{4c^2}\right) &= -c, \\
c\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + c\left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 &= -c + \frac{1}{2c} = \frac{1-2c^2}{2c}, \\
\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 &= \frac{1-2c^2}{2c^2} = \frac{1}{2c^2} - 1.
\end{aligned}$$

Z poslednej rovnice sme okrem iného schopní dopočítať obor hodnôt funkcie f. Ľavá strana rovnice je nezáporná:

$$0 \leq \frac{1}{2c^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{1}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad c^2 \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |c| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Obr. 4: Príklad 4

To znamená, že obor hodnôt funkcie f je interval $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ a nemá zmysel uvažovať c mimo tohto intervalu. Vrstevnice funkcie f sú kružnice so stredom v bode $[\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}]$ a polomerom $\sqrt{\frac{1}{2c^2} - 1}$. ✈

Limita

Príklad 5. Vypočítajte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\tan^2(xy)}{x\sin(xy)}.$$

Najprv uskutočníme pár úprav:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\tan^2(xy)}{x\sin(xy)} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x\cos^2(xy)} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{y}{\cos^2(xy)}\right).$$

Druhý zlomok určuje spojitú funkciu v bode $[0, 2]$ takže platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y}{\cos^2(xy)} = \frac{2}{\cos^2(0 \cdot 2)} = 2.$$

Na výpočet limity prvého zlomku môžeme použiť vetu o limite zloženej funkcie na strane 121 z prednášky [2]:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \left| \begin{array}{c} t = xy \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} t = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} xy = 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

V konečnom dôsledku platí

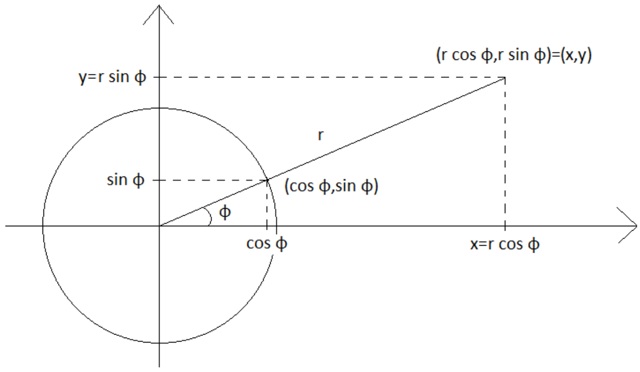
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{y}{\cos^2(xy)}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y}{\cos^2(xy)} = 1 \cdot 2 = 2.$$

✈

Príklad 6. Vypočítajte limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Použijeme transformáciu do polárnych súradníc. Zavedieme premenné r a φ, ktorých vzťah s pôvodnými premennými x a y je daný rovnicami $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Hodnota premennej r je vzdialenosť bodu $[x, y]$ od počiatku $[0, 0]$, zatiaľčo hodnota premennej φ je uhol medzi spojnicou bodov $[x, y]$ a $[0, 0]$ a kladnou časťou osi x meraný proti smeru hodinových ručičiek.



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0^+ \end{array} \right| = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$
$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{\to 0} \underbrace{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}_{\text{ohraničená}} = 0.$$

Fakt, že sa aj pôvodná limita rovná 0 je dôsledkom vety 2.13 na strane 17 v [3], respektíve vety 39 na strane 119 v [2]. ✈

Príklad 7. Vypočítajte nasledujúcu limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{y^2}{x^4+x^2y}.$$

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že uvedená limita existuje a je rovná 0, keďže v zlomku sa vyskytujú polynómy v premenných x a y, pričom v menovateli je polynóm vyššieho stupňa ako v čitateli. Približovanie sa k bodu (∞,∞) po priamkach $y = kx$, kde $k\in[0,\infty)$, tomu nasvedčuje:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{y^2}{x^4+x^2y} \left| \begin{array}{c} y = kx \\ x\to\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{k^2x^2}{x^4+kx^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{k^2}{x^2+kx} = 0.$$

Opak je však pravdou. Ak by sme sa k bodu (∞,∞) približovali po krivke $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tak, že hodnoty premennej y by narastali rádovo rýchlejšie ako hodnoty premennej x, potom by čitateľ mohol kompenzovať rýchly nárast menovateľa. Približujme sa preto k bodu (∞,∞) po parabolách $y = kx^2$, kde $k\in[0,\infty)$:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{y^2}{x^4+x^2y} \left| \begin{array}{c} y = kx^2 \\ x\to\infty \end{array} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{k^2x^4}{x^4+kx^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{k^2}{1+k} = \frac{k^2}{1+k}.$$

Limitná hodnota závisí od spôsobu, akým sa k bodu (∞,∞) približujeme, čo znamená, že limita neexistuje. ✈

Príklad 8. Vypočítajte nasledujúcu limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Opäť sa môže zdať, že čitateľ by sa mal k nule v každom prípade blížiť rýchlejšie ako menovateľ, čo by znamenalo, že uvedená limita je nulová. Na priamke $y = 0$ to skutočne platí:

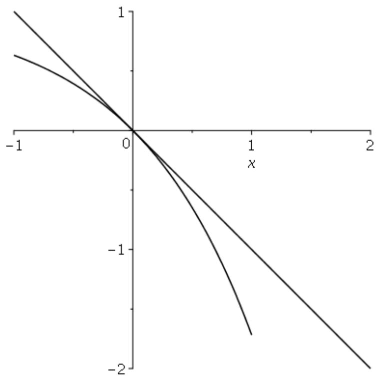
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} \left| \begin{array}{c} y = 0 \\ x\to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

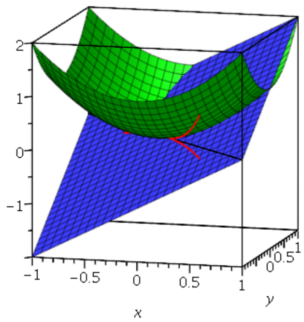
Predstavme si jednotlivé funkcie. Funkcia $z = x^2 + y^2$ nadobúda len kladné hodnoty a jej vrstevnice $x^2 + y^2 = c$ sú sústredné kružnice s polomerom $\sqrt{c}$. Rezy rovinami $x = 0$ a $y = 0$ sú paraboly $f(0, y) = y^2$, respektíve $f(x, 0) = x^2$. Graf funkcie $z = x + y$ je rovina prechádzajúca počiatkom, ktorej smerové vektory sú $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$. Na priamke $y = -x$ nadobúda funkcia $x + y$ nulové hodnoty. Ak by sme sa k bodu $(0, 0)$ približovali po krivke, ktorá sa dostatočne plocho dotýka priamky $y = -x$, mohol by sa menovateľ k nule blížiť aspoň tak rýchlo ako čitateľ. Ako vhodná voľba sa ukazuje $y = -\mathrm{e}^x + 1$:

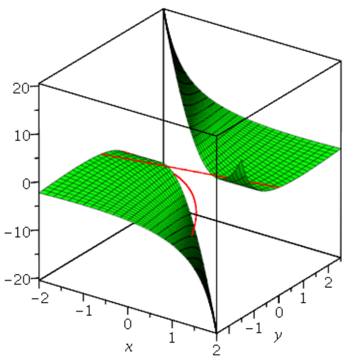
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} \left| \begin{array}{c} y = -\mathrm{e}^x + 1 \\ x \to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1 - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}{x - \mathrm{e}^x + 1} \xrightarrow[\left|\frac{0}{0}\right|]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x}}{1 - \mathrm{e}^x}$$

$$\xrightarrow[\left|\frac{0}{0}\right|]{\text{l'Hosp.}} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{2x}}{-\mathrm{e}^x} = -4.$$

Potenciálna limitná hodnota opäť závisí od spôsobu približovania sa, preto limita neexistuje. ✈







Obr. 5: Príklad 8

Parciálna derivácia

Príklad 9. Spočítajte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Parciálna derivácia podľa premennej x sa uskutoční tak, že premennú y zvolíme pevne, teda ju budeme chápať ako konštantu, čo nás privedie k funkcii jednej premennej, x, a tú zderivujeme tak, ako to poznáme z diferenciálneho počtu funkcií jednej premennej. Rovnaký postup platí pre parciálnu deriváciu podľa premennej y.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(yx^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} \cdot y\right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

✈

Príklad 10. Spočítajte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$f(x,y) = x^{y^x}.$$

Pri derivovaní podľa premennej x nie je zrejmé, ktorá funkcia je vonkajšia a ktorá vnútorná. Preto použijúc exponenciálu a logaritmus upravíme predpis funkcie f:

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y^x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{y^x \log x}\right) = \mathrm{e}^{y^x \log x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(y^x \cdot \log x\right) = \mathrm{e}^{y^x \log x}\left(y^x \log y \cdot \log x + y^x \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= y^x \cdot x^{y^x} \cdot \left(\log y \cdot \log x + \frac{1}{x}\right) = y^x \cdot x^{y^x - 1} \cdot \left(x \cdot \log y \cdot \log x + 1\right), \\
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y^x}\right) = \log x \cdot x^{y^x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^x\right) = \log x \cdot x^{y^x} \cdot x \cdot y^{x-1} = x^{y^x+1} \cdot y^{x-1} \cdot \log x.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 11. Spočítajte všetky parciálne derivácie do druhého rádu funkcie

$$f(x,y) = -x + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} = -x + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right).$$

Počítajme:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right)\right) = -1 + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{(1+xy) - xy}{(1+xy)^2} \\
&= -1 + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{1}{(1+xy)^2}, \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-x + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right)\right) = \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-x}{(1+xy)^2} \cdot x \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2}, \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}}\right) \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(1+xy)^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-2y}{(1+xy)^3} \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \left(\frac{1}{(1+xy)^4} + \frac{-2y}{(1+xy)^3}\right), \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}}\right) \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(1+xy)^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-2x}{(1+xy)^3} \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \left(\frac{-x^2}{(1+xy)^4} + \frac{-2x}{(1+xy)^3}\right), \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}}\right) \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2}{(1+xy)^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{1}{(1+xy)^2} \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} \cdot \frac{-2x(1+xy)^2 + 2x^2y(1+xy)}{(1+xy)^4} \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \left(\frac{-x^2}{(1+xy)^4} + \frac{-2x}{(1+xy)^3}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y(x,y)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}}\right) \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} + \mathrm{e}^{\frac{x}{1+xy}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x^2}{(1+xy)^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} \cdot \frac{-x^2}{(1+xy)^2} + \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \frac{2x^3}{(1+xy)^3} \\
&= \exp\left(\frac{x}{1+xy}\right) \cdot \left(\frac{x^4}{(1+xy)^4} + \frac{2x^3}{(1+xy)^3}\right).
\end{aligned}
$$

Ak sú parciálne derivácie f_{xy} a f_{yx} spojité, potom podľa Schwarzovej vety platí $f_{xy} = f_{yx}$, takže táto rovnosť v našom prípade nie je náhodná. ✈

Príklad 12. Spočítajte smerovú deriváciu funkcie $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$ v bode $[1,-2]$ v smere vektora $u = (2,1)$.

Máme dve možnosti ako postupovať:

- Priamo z definície platí $f_u(1,-2) = \varphi'(0)$, kde $\varphi(t) = f(1 + 2 \cdot t, -2 + 1 \cdot t)$. Počítajme:

  $$\varphi(t) = f(1+2t, -2+t) = \mathrm{e}^{-(1+2t)(-2+t)} = \mathrm{e}^{-2t^2+3t+2}.$$

  Ďalej platí

  $$
  \begin{aligned}
  \varphi'(t) &= \left(\mathrm{e}^{-2t^2+3t+2}\right)' = \mathrm{e}^{-2t^2+3t+2} \cdot (-4t+3), \\
  \varphi'(0) &= 3\mathrm{e}^2.
  \end{aligned}
  $$

  Výsledok je $f_u(1,-2) = 3\mathrm{e}^2$.

- Druhá možnosť je spočítať skalárny súčin gradientu funkcie f v bode $[1-2]$ s vektorom $(2,1)$:

  $$f_u(1,-2) = \Big\langle (f_x(1,-2), f_y(1,-2)), (2,1) \Big\rangle.$$

  Najprv spočítame parciálne derivácie:

  $$
  \begin{aligned}
  f_x(x,y) &= -y\mathrm{e}^{-xy} \quad \Rightarrow \quad f_x(1,-2) = 2\mathrm{e}^2, \\
  f_y(x,y) &= -x\mathrm{e}^{-xy} \quad \Rightarrow \quad f_y(1,-2) = -\mathrm{e}^2,
  \end{aligned}
  $$

  Takže pre smerovú deriváciu platí

  $$f_u(1,-2) = \Big\langle (2\mathrm{e}^2, -\mathrm{e}^2), (2,1) \Big\rangle = 4\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 = 3\mathrm{e}^2,$$

  čo je ten istý výsledok ako v predošlom prípade.

✈

Príklad 13. Nájdite dotykovú rovinu ku grafu funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$ v bode $[1,1,?]$.

Rovnica dotykovej roviny v bode (x_0,y_0) ku grafu funkcie f má tvar

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

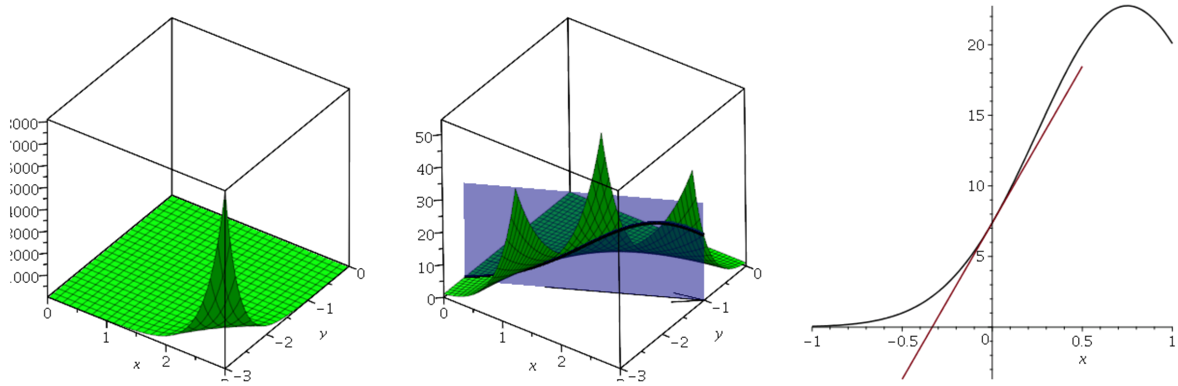
V našom prípade je $(x_0,y_0) = (1,1)$. Stačí nám dopočítať funkčnú hodnotu a hodnoty parciálnych derivácií v bode $(1,1)$:

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &= 1^2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = 2, \\
f_x(x,y) &= 2x - y \quad \Rightarrow \quad f_x(1,1) = 1, \\
f_y(x,y) &= 4y - x \quad \Rightarrow \quad f_x(1,1) = 3.
\end{aligned}
$$

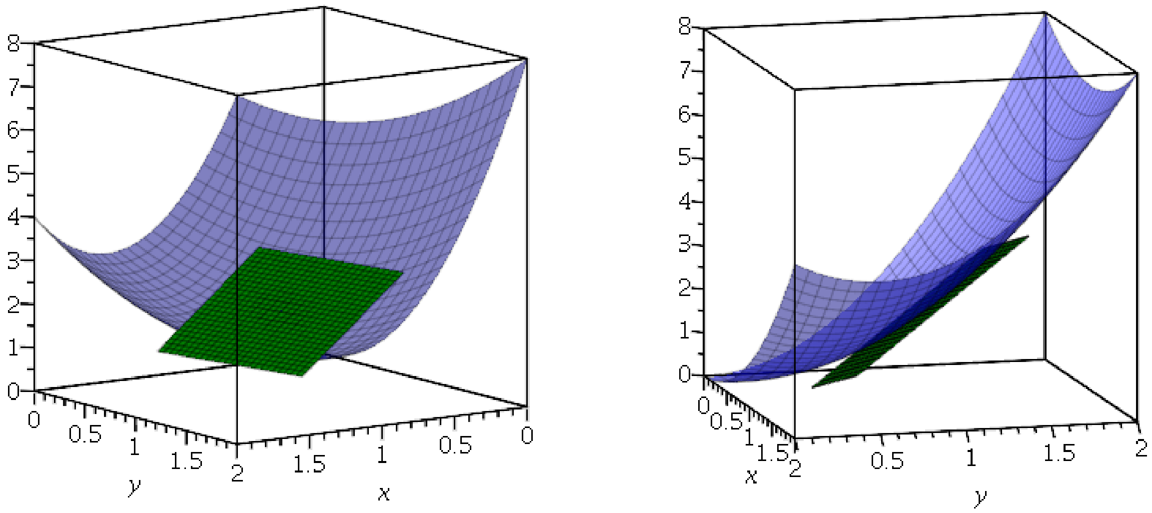
Zostáva nám už len dosadiť:

$$
\begin{aligned}
z &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1), \\
z &= 2 + (x-1) + 3(y-1), \\
z - x - 3y &= -2.
\end{aligned}
$$

✈



Obr. 6: Príklad 12



Obr. 7: Príklad 13

Príklad 14. Pomocou diferenciálu vhodnej funkcie určte približne hodnotu $\log(0,97^2 + 0,05^2)$.

Ako vhodná funkcia sa javí $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, pretože v bode $(1, 0)$ sme schopný vypočítať funkčnú hodnotu presne a bod $(0,97, 0,05)$, v ktorom odhadujeme funkčnú hodnotu funkcie f, je relatívne blízko bodu $(1, 0)$. Pre (x, y) dostatočne blízke (x_0, y_0) platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

V našom prípade je $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Najprv vypočítame funkčnú hodnotu a hodnotu parciálnych derivácií v bode $(1, 0)$:

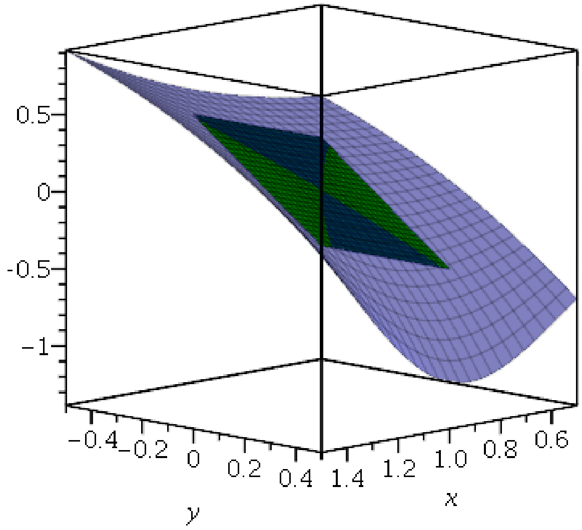
$$\begin{aligned} f(1, 0) &= \log(1^2 + 0^2) = 0, \\ f_x(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 0) = 2, \\ f_y(x, y) &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 0) = 0. \end{aligned}$$

Po dosadení dostávame

$$f(x, y) \approx f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y,$$

$$f(x,y) \approx 2(x-1),$$
$$f(0,97,0,05) \approx 2(0,97-1) = 2 \cdot (-0.03) = -0.06.$$

Presná hodnota je približne $-0,02530412809031697442972544394581$. ✈



Obr. 8: Príklad 14

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy II*, `http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana a DOŠLÝ, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*