MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 9. cvičenie, 2.12.2020

Kmeňová funkcia

Príklad 1. Rozhodnite, či k dvojici funkcií

$$P(x,y) = y\cos x + \frac{y^2\sin x}{\cos^2 x} \qquad \text{a} \qquad Q(x,y) = \sin x + \frac{2y}{\cos x}$$

existuje kmeňová funkcia. Ak áno, nájdite ju.

Najprv spočítame parciálne derivácie P_y a Q_x a porovnáme ich:

$$P_y = \cos x + \frac{2y\sin x}{\cos^2 x}, \qquad Q_x = \cos x + \frac{2y\sin x}{\cos^2 x}.$$

Vzhľadom k tomu, že sa rovnajú, existuje funkcia $H(x,y)$, ktorá spĺňa $H_x = P$ a $H_y = Q$. Funkcia H sa nazýva kmeňová funkcia. Pre každé pevne zvolené x je $H_y(x,y) = Q(x,y)$ rovnosť dvoch funkcií (jednej) premennej y. Táto rovnosť hovorí, že funkcia $H(x,y)$ premennej y je primitívna funkcia k funkcii $Q(x,y)$ premennej y. Premennú x teda chápeme ako konštantu a funkciu H nájdeme integrovaním funkcie Q:

$$H(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \sin x + \frac{2y}{\cos x}\,\mathrm{d}y = y\sin x + \frac{y^2}{\cos x} + c(x).$$

Integračná konštanta tentokrát závisí od premennej x, pretože v skutočnosti sme predošlý neurčitý integrál spočítali pre každé vopred pevne zvolené x. Konkrétny tvar funkcie $c(x)$ dostaneme z rovnice $H_x = P$:

$$\begin{aligned}
H_x &= P\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sin x + \frac{y^2}{\cos x} + c(x)\right) &= y\cos x + \frac{y^2\sin x}{\cos^2 x}\\
y\cos x + \frac{y^2\sin x}{\cos^2 x} + c'(x) &= y\cos x + \frac{y^2\sin x}{\cos^2 x}\\
c'(x) &= 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pre akékoľvek $c \in \mathbb{R}$ určuje nasledujúci predpis hľadanú kmeňovú funkciu:

$$H(x,y) = y\sin x + \frac{y^2}{\cos x} + c.$$

Samozrejme, mohli sme zvoliť aj opačný postup, teda počítať integrál $\int P(x,y)\,\mathrm{d}x$ a funkciu $c(y)$ dopočítať z rovnice $H_y = Q$. ✈

Príklad 2. Rozhodnite, či k dvojici funkcií

$$P(x,y) = \frac{y}{x} \qquad \text{a} \qquad Q(x,y) = \log(xy) + 1$$

existuje kmeňová funkcia. Ak áno, nájdite ju.

Pre parciálne derivácie platí:

$$P_y = \frac{1}{x}, \qquad Q_x = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}.$$

Kmeňová funkcia teda existuje. Integrujme:

$$H(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x = y\log(x) + c(y). \tag{1}$$

Funkciu $c(y)$ dopočítame z rovnice $H_y = Q$:

$$
\begin{aligned}
H_y &= Q \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(y\log(x) + c(y)\right) &= \log(xy) + 1 \\
\log x + c'(y) &= \log(xy) + 1 \\
c'(y) &= \log(xy) - \log x + 1 = \log y + 1 \\
c(y) &= \int \log y + 1 \,\mathrm{d}y = y\log y - y + y + c = y\log y + c.
\end{aligned}
$$

Funkcia H má preto tvar

$$H(x,y) = y\log(x) + y\log y + c = y\log(xy) + c.$$ ✈

Parciálna derivácia zloženej funkcie

Príklad 3. Uvažujme zloženú funkciu $f(u(x,y), v(x,y))$, kde

$$f(u,v) = \sin u \cdot \cos v, \qquad u(x,y) = x^2 - y, \qquad v(x,y) = \mathrm{e}^{xy}.$$

Spočítajte parciálne derivácie f_x a f_y.

Použijeme reťazové pravidlo, teda vzorce pre výpočet parciálnych derivácii zloženej funkcie:

$$f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x, \qquad f_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y.$$

Spočítajme jednotlivé parciálne derivácie:

$$
\begin{aligned}
f_u &= \cos u \cos v, & u_x &= 2x, & v_x &= \mathrm{e}^{xy}y, \\
f_v &= -\sin u \sin v, & u_y &= -1, & v_y &= \mathrm{e}^{xy}x.
\end{aligned}
$$

Po dosadení dostaneme

$$
\begin{aligned}
f_x &= \cos u \cos v \cdot 2x - \sin u \sin v \cdot \mathrm{e}^{xy}y = \cos(x^2 - y)\cos(\mathrm{e}^{xy}) \cdot 2x - \sin(x^2 - y)\sin(\mathrm{e}^{xy}) \cdot \mathrm{e}^{xy}y, \\
f_x &= \cos u \cos v \cdot (-1) - \sin u \sin v \cdot \mathrm{e}^{xy}x = -\cos(x^2 - y)\cos(\mathrm{e}^{xy}) - \sin(x^2 - y)\sin(\mathrm{e}^{xy}) \cdot \mathrm{e}^{xy}y.
\end{aligned}
$$

Rovnaký výsledok by sme dostali aj v prípade, keby sme hneď na začiatku dosadili do predpisu funkcie $f(u,v)$ za $u = x^2 - y$ a $v = \mathrm{e}^{xy}$ a výsledný výraz parciálne derivovali. ✈

Príklad 4. Transformujte jednorozmernú vlnovú rovnicu

$$a^2 z_{xx} - z_{yy} = 0$$

do nových premenných $u = x + ay$, $v = x - ay$ a nájdite jej riešenie.

Neznámu funkciu $z(x,y)$ budeme chápať ako funkciu premenných u a v, čo si môžeme predstaviť tak, že z rovníc $u = x + ay$ a $v = x - ay$ vyjadríme pôvodné premenné x a y a výsledok dosadíme do predpisu $z(x,y)$. Preto platí $z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y))$. S použitím pravidiel pre deriváciu zloženej funkcie vyjadríme derivácie z_{xx} a z_{yy} pomocou parciálnych derivácii funkcie z podľa nových premenných u a v. Výsledok dosadíme do vlnovej rovnice, čím ju transformujeme do premenných u a v.

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v, \qquad z_y = z_u u_y + z_v v_y = a z_u - a z_v.$$

Odvoďme si pravidlá pre parciálne derivácie druhého rádu zloženej funkcie:

$$\begin{aligned}
\boxed{z_{xx}} &= \frac{\partial}{\partial x}(z_x) = \frac{\partial}{\partial x}(z_u u_x + z_v v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(z_u)u_x + z_u\frac{\partial}{\partial x}(u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(z_v)v_x + z_v\frac{\partial}{\partial x}(v_x) \\
&= (z_{uu}u_x + z_{uv}v_x)u_x + z_u u_{xx} + (z_{vu}u_x + z_{vv}v_x)v_x + z_v v_{xx} \\
&\boxed{= z_{uu}(u_x)^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}(v_x)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx}}, \\
\boxed{z_{yy}} &= \frac{\partial}{\partial y}(z_y) = \frac{\partial}{\partial y}(z_u u_y + z_v v_y) = \frac{\partial}{\partial y}(z_u)u_y + z_u\frac{\partial}{\partial y}(u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(z_v)v_y + z_v\frac{\partial}{\partial y}(v_y) \\
&= (z_{uu}u_y + z_{uv}v_y)u_y + z_u u_{yy} + (z_{vu}u_y + z_{vv}v_y)v_y + z_v v_{yy} \\
&\boxed{= z_{uu}(u_y)^2 + 2z_{uv}u_y v_y + z_{vv}(v_y)^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy}}.
\end{aligned}$$

Pripomeňme, že funkcie z, z_u, z_v chápeme ako funkcie premenných $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$, teda ako zložené funkcie premenných x a y. Pri ich derivovaní teda uplatňujeme reťazové pravidlo pre parciálne derivácie prvého rádu zloženej funkcie.

V našom prípade platí

$$z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, \qquad z_{yy} = a^2 z_{uu} - 2a^2 z_{uv} + a^2 z_{vv},$$

pretože $u_{xx} = v_{xx} = u_{yy} = v_{yy} = 0$, $u_x = v_x = 1$, $u_y = a$ a nakoniec $v_y = -a$. Dosaďme tieto rovnosti do vlnovej rovnice:

$$0 = a^2 z_{xx} - z_{yy} = a^2 z_{uu} + 2a^2 z_{uv} + a^2 z_{vv} - (a^2 z_{uu} - 2a^2 z_{uv} + a^2 z_{vv}) = 4a^2 z_{uv}.$$

Vlnová rovnica v premenných $u = x + ay$, $v = x - ay$ má tvar

$$z_{uv} = 0.$$

Pokúsme sa nájsť jej riešenie. Rovnosť

$$z_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}(z_u) = 0$$

implikuje, že funkcia $z_u(u, v)$ nezávisí od premennej v, takže platí $z_u(u, v) = f(u)$, pre vhodnú funkciu f. Pre každé pevne zvolené v zase rovnosť $z_u(u, v) = f(u)$ hovorí, že funkcia $z(u, v)$ (jednej) premennej u je primitívna funkcia k funkcii $f(u)$. Preto ju môžeme dopočítať integráciou:

$$z(u, v) = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + c(v),$$

kde $c(v)$ je, podobne ako v príkladoch o kmeňovej funkcii, integračná konštanta závislá od premennej v. Zistili sme, že riešenie by malo byť zapísateľné v tvare

$$z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)) = F(x + ay) + c(x - ay),$$

kde F a c sú vhodné funkcie. Spätným derivovaním sa môžeme presvedčiť o tom, že pre ľubovoľnú dvojicu funkcií F a c, ktoré majú derivácie druhého rádu, zadáva predošlá rovnosť riešenie vlnovej rovnice. ✈

Príklad 5. Transformujte dvojrozmernú Laplaceovu rovnicu

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

do polárnych súradníc.

Pripomeňme, že polárne súradnice sú dané nasledujúcimi vzťahmi:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Vyjadrime z týchto rovníc premenné r a φ.

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \qquad &\Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \qquad &\Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Pomocou pravidla pre deriváciu zloženej funkcie postupne vyjadríme derivácie z_{xx} a z_{yy} v závislosti od parciálnych derivácií funkcie z podľa premenných r a φ:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \varphi_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \\ r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \\ r_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \varphi_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ r_{yy} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \varphi_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{rr}(r_x)^2 + 2z_{r\varphi}r_x\varphi_x + z_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + z_r r_{xx} + z_\varphi\varphi_{xx}, \\ z_{yy} &= z_{rr}(r_y)^2 + 2z_{r\varphi}r_y\varphi_y + z_{\varphi\varphi}(\varphi_y)^2 + z_r r_{yy} + z_\varphi\varphi_{yy}. \end{aligned}$$

Aby sme ušetrili počítanie, rovno dosadíme do Laplaceovej rovnice:

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= z_{rr}((r_x)^2 + (r_y)^2) + z_{\varphi\varphi}((\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2) + z_r(r_{xx} + r_{yy}) \\ &= z_{rr}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + z_{\varphi\varphi}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + z_r\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= z_{rr} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{x^2+y^2} + \frac{z_r}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= z_{rr} + \frac{z_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{z_r}{r}. \end{aligned}$$

V polárnych súradniciach má Laplaceova rovnica tvar

$$r^2 z_{rr} + z_{\varphi\varphi} + r z_r = 0.$$

✈

Lokálne a globálne extrémy

Pri rozhodovaní o tom, či v stacionárnom bode nastáva alebo nenastáva lokálny extrém budeme používať kritérium formulované ako veta 58 v [2] na strane 128. Špeciálne, výraz $D(x_0, y_0)$ vystupujúci v tvrdení tejto vety je determinant Hessovej matice (Hessián) v bode (x_0, y_0). Zdôraznime, že ak $D(x_0, y_0) = 0$, potom nie sme schopní na základe tohto kritéria nič usúdiť o (ne)prítomnosti lokálneho extrému.

V takom prípade je nutné postupovať priamo. Ak chceme ukázať, že v danom bode nastáva extrém, musíme nájsť nejaké okolie tohto bodu v ktorom daná funkcia nenadobúda väčšie, respektíve menšie hodnoty oproti funkčnej hodnote v danom stacionárnom bode. V opačnom prípade musíme ukázať, že v ľubovoľnom okolí skúmaného stacionárneho bodu funkcia nadobúda aj menšie aj väčšie hodnoty v porovnaní s funkčnou hodnotou v danom bode. Typicky sú v týchto prípadoch užitočné rezy rôznymi rovinami.

Priblížme stručne postup pri vyšetrovaní absolútnych extrémov na nejakej podmnožine M definičného oboru funkcie f. Tie môžu nastať jednak v stacionárnych bodoch funkcie f ležiacich vo vnútri množiny M, alebo na hranici množiny M. Hranica množiny M bude v našom prípade vždy tvorená konečným počtom kriviek, ktoré sa budú dať vyjadriť ako grafy funkcií $y = y(x)$, respektíve $x = x(y)$. Túto závislosť dosadíme do predpisu funkcie $f(x, y)$, čo nás privedie k funkcii jednej premennej. Jej extrémy môžu opäť nastať buď v krajných bodoch intervalu, na ktorom ju vyšetrujeme, alebo v stacionárnych bodoch. Na záver vypočítame funkčné hodnoty vo všetkých potenciálnych bodoch výskytu extrému a nájdeme spomedzi nich najväčšiu a najmenšiu hodnotu.

Príklad 6. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

Keďže lokálne extrémy sa vyskytujú buď v stacionárnych bodoch[1] alebo v bodoch, kde aspoň jedna parciálna derivácia prvého rádu neexistuje, spočítame f_x a f_y:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1+x^2+y^2-(x+y)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2-2xy+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ f_y &= \frac{1+x^2+y^2-(x+y)\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-y^2-2xy+x^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Derivácie f_x a f_y evidentne existujú v každom bode $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, takže nám stačí nájsť stacionárne body:

$$\begin{aligned} f_x = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad 1-x^2-2xy+y^2 = 0, \\ f_y = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad 1-y^2-2xy+x^2 = 0. \end{aligned}$$

Uvedené dve rovnice najskôr sčítame a potom ich od seba odčítame, čo nás privedie k ekvivalentnému systému nasledujúcich dvoch rovníc:

$$xy = \frac{1}{2}, \quad x^2 = y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad xy = \frac{1}{2}, \quad |x| = |y| \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{2}, \quad x = y,$$

čo nás privádza k dvom stacionárnym bodom

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Na to, aby sme zistili, či sa v týchto bodoch skutočne nachádza extrém, potrebujeme spočítať parciálne derivácie druhého rádu:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{(-2x-2y)(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1-x^2-2xy+y^2)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3-6x-2y}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{xy} &= \frac{(-2x+2y)\left(1+x^2+y^2\right)^2 - 4y(1-x^2-2xy+y^2)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

[1]Stacionárny bod je bod, v ktorom existujú všetky parciálne derivácie prvého rádu a všetky sú rovné nule.

$$= \frac{-2x^3+6x^2y+6xy^2-2y^3-2y-2x}{(1+x^2+y^2)^3},$$

$$f_{yy} = \frac{(-2y-2x)(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1-y^2-2xy+x^2)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3-6x^2y+6xy^2+2y^3-6y-2x}{(1+x^2+y^2)^3}.$$

Ďalej budeme potrebovať znamienko determinantu Hessovej matice v stacionárnych bodoch:

$$\det H(x_0,y_0) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Keďže nás zaujíma len znamienko, stačí počítať determinant matice

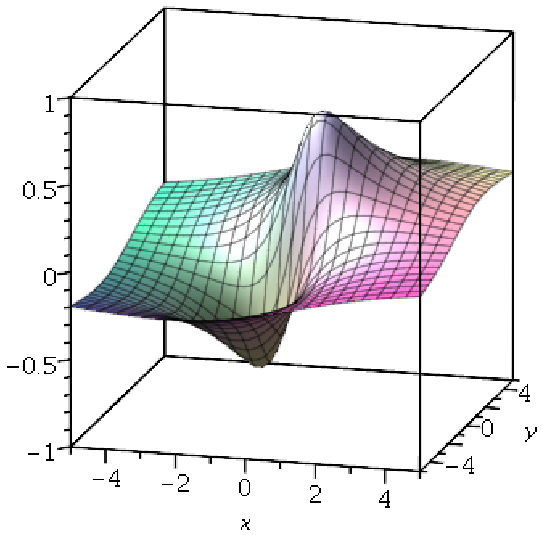
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3-6x-2y & -2x^3+6x^2y+6xy^2-2y^3-2y-2x \\ -2x^3+6x^2y+6xy^2-2y^3-2y-2x & -2x^3-6x^2y+6xy^2+2y^3-6y-2x \end{pmatrix}.$$

Počítajme:

$$\det M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{8}{2\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{2\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 32,$$

$$\det M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & -\frac{8}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 32.$$

V obidvoch stacionárnych bodoch vyšiel determinant kladný, čo znamená, že v obidvoch bodoch nastáva extrém. Keďže $f_{xx}(P_1) < 0$, v bode P_1 nastáva lokálne maximum, zatiaľčo v bode P_2 nastáva lokálne minimum vzhľadom k tomu, že $f_{xx}(P_2) > 0$. ✈



Obr. 1: Príklad 6

Príklad 7. Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = x^4+y^4-x^2-y^2.$$

Najprv spočítame parciálne derivácie prvého rádu:

$$f_x = 4x^3 - 2x, \qquad f_y = 4y^3 - 2y.$$

Teraz nájdeme stacionárne body:

$$\begin{aligned} f_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4x^3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \\ f_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4y^3 - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(2y^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Vzhľadom k tomu, že x a y môžu nezávisle na sebe nadobúdať až tri hodnoty, funkcia f má 9 stacionárnych bodov. Všimnime si, že pre ľubovoľné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$f(-x, -y) = f(x, -y) = f(-x, y) = f(x, y).$$

To znamená, že funkcia f sa v kvadrantoch $\{x \leq 0, y \geq 0\}$, $\{x \leq 0, y \leq 0\}$ a $\{x \geq 0, y \leq 0\}$ správa úplne rovnako ako v prvom kvadrante $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Stačí nám preto vyšetriť štyri stacionárne body $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ v prvom kvadrante. Pozrime sa na parciálne derivácie druhého rádu:

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = 12y^2 - 2.$$

Hessova matica má tvar

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Vyšetrime znamienko jej determinantu v uvažovaných štyroch stacionárnych bodoch:

$$\det H(0,0) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4, \qquad \det H\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -8,$$
$$\det H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -8, \qquad \det H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 16.$$

V bode $(0, 0)$ je Hessián kladný a $f_{xx}(0, 0) < 0$, takže tu nastáva lokálne maximum. V bodoch $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ je Hessián záporný, čo znamená, že v týchto bodoch extrém nenastáva, jedná sa o sedlové body. Zo spomínaných vlastností funkcie f vyplýva, že to isté platí aj pre body $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Nakoniec, v bode $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je Hessián kladný a tiež platí $f_{xx} > 0$, čo znamená, že sa jedná o lokálne minimum. To isté platí aj pre body $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. ✈

Príklad 8. Nájdite lokálne extrémy funkcie

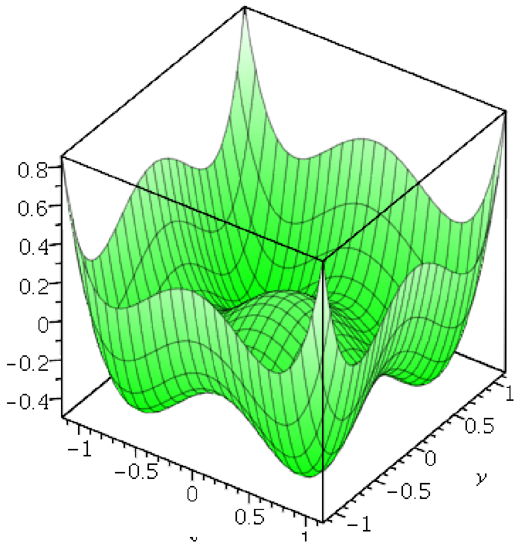
$$f(x, y) = x^3 + y^4 - y^2 - y^2x.$$

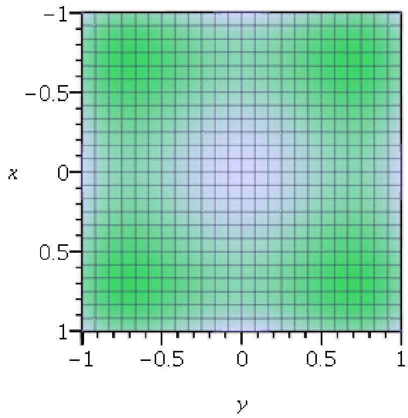
Parciálne derivácie prvého rádu majú nasledujúci tvar:

$$f_x = 3x^2 - y^2, \qquad f_y = 4y^3 - 2y - 2yx.$$

Stacionárne body sú riešením nasledujúceho systému:

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 3x^2 = y^2, \\ 4y^3 - 2y - 2yx = 0 \quad &\Rightarrow \quad y(4y^2 - 2 - 2x) = 0. \end{aligned}$$





Obr. 2: Príklad 7

Ak $y = 0$, potom tiež $x = 0$, čo nás privádza k prvému stacionárnemu bodu $(0, 0)$. Na druhej strane, ak $y \neq 0$, potom musí platiť $4y^2 - 2 - 2x = 0$. Po dosadení z prvej rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu v premennej x:

$$12x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}.$$

Opäť po dosadení do prvej rovnice a dopočítaní premennej y dostaneme ďalšie štyri stacionárne body: $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Opäť môžeme využiť fakt, že funkcia f je párna v premennej y, čo znamená, že pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí $f(x, -y) = f(x, y)$. Stačí nám preto vyšetrovať vždy len jeden z dvojice bodov $(x_0, \pm y_0)$. Spočítajme derivácie druhého rádu:

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -2y, \qquad f_{yy} = 12y^2 - 2 - 2x.$$

Hessova matica má nasledujúci tvar:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 12y^2 - 2 - 2x \end{pmatrix} \tag{2}$$

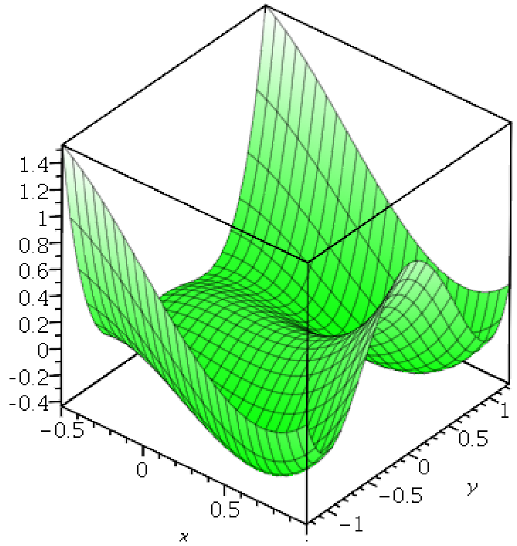
Jej determinant má v stacionárnych bodoch tieto hodnoty:

$$\det H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0,$$

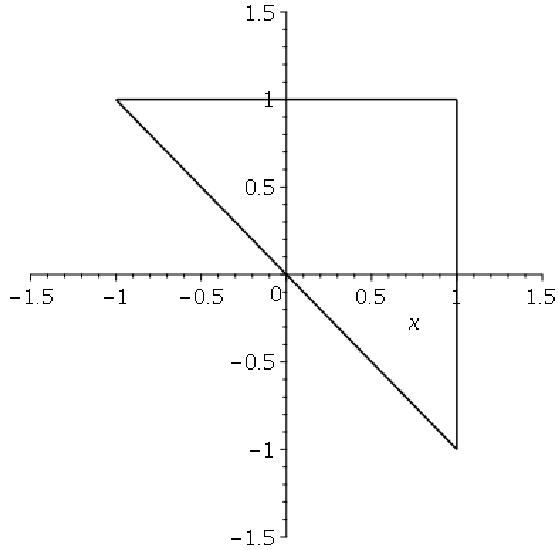
$$\det H\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \det \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} = 15 > 0,$$

$$\det H\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \det \begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = -\frac{20}{3} < 0.$$

V bodoch $(-\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ extrém nenastáva, jedná sa o sedlové body. Keďže $f_{xx}(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3 > 0$, v bodoch $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ nastáva lokálne minimum. O tom, čo sa deje v bode $(0, 0)$ nevieme na základe parciálnych derivácií druhého rádu rozhodnúť. Musíme si poradiť inak. Všimnime si, že $f(0, 0) = 0$ a $f(x, 0) = x^3$. To znamená, že funkcia f nadobúda v ľubovoľne malom okolí bodu $(0, 0)$ aj kladné aj záporné hodnoty, teda aj hodnoty väčšie aj hodnoty menšie oproti funkčnej hodnote v bode $(0, 0)$. To znamená, že v tomto bode nemôže nastať lokálny extrém. ✈



Obr. 3: Príklad 8



Obr. 4: Príklad 9

Príklad 9. Nájdite globálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy.$$

na trojuholníku M, ktorého vrcholy sú $[-1,1]$, $[1,1]$ a $[1,-1]$.

Keďže M je kompaktná množina a f je spojitá funkcia, funkcia f nadobúda na množine M svoju najmenšiu a najväčšiu hodnotu. Začneme stacionárnymi bodmi:

$$\begin{array}{c} f_x = 3x^2 - y \\ f_y = 3y^2 - x \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 3x^2 - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x^2 = y \\ 27x^4 - x = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x^2 = y \\ x(27x^3 - 1) = 0 \end{array}$$

Z poslednej rovnice dostávame $x \in \{0, \frac{1}{3}\}$, čo nás po dosadení do prvej rovnice privedie k dvom stacionárnym bodom: $(0,0)$ a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Keďže bod $(0,0)$ leží na hranici množiny M, budeme sa mu venovať neskôr. Pozrime sa na bod $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$:

$$\begin{array}{l} f_{xx} = 6x, \\ f_{xy} = -1, \\ f_{yy} = 6y \end{array} \Rightarrow \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

Platí $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 2 > 0$, takže v bode $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nastáva lokálne minimum. Prvý kandidát na globálny extrém funkcie f je preto bod $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Hranica množiny M je tvorená stranami trojuholníka, ktoré sú grafmi nasledujúcich funkcií: $y(x) = -x$ pre $x \in [-1,1]$, $y(x) = 1$ pre $x \in [-1,1]$ a $x(y) = 1$ pre $y \in [-1,1]$. Postupne vyšetríme všetky tri možnosti:

- $y(x) = -x \Rightarrow f(x, y(x)) = f(x, -x) = x^2$. Funkcia x^2 má v intervale $[-1,1]$ jeden stacionárny bod, a to 0. Vieme, že sa jedná o globálne minimum tejto funkcie. Maximum na intervale $[-1,1]$ nadobúda v bodoch -1 a 1. Kandidáti na globálne extrémy funkcie f sú body $(0,0)$, $(-1,1)$ a $(1,-1)$.

- $y(x) = 1 \Rightarrow f(x, y(x)) = f(x, 1) = x^3 - x + 1$. Prvá derivácia funkcie $g(x) = x^3 - x + 1$ je $g'(x) = 3x^2 - 1$. Stacionárne body sú $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Druhá derivácia má tvar $g''(x) = 6x$. Keďže $g''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ a $g''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, má funkcia g v bode $\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokálne minimum a v bode $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ lokálne maximum. Funkcia g môže nadobúdať extrém aj v krajných bodoch intervalu $[-1,1]$. Kandidáti na globálne extrémy funkcie f sú body $(-1,1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ a $(1,1)$.

- $x(y) = 1 \Rightarrow f(x(y), y) = f(1, y) = y^3 - y + 1$. Situácia je rovnaká ako v predošlom bode, jedná sa o ten istý prípad funkcie jednej premennej. Kandidáti na globálne extrémy funkcie f sú body $(1, -1)$, $(1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(1, 1)$.

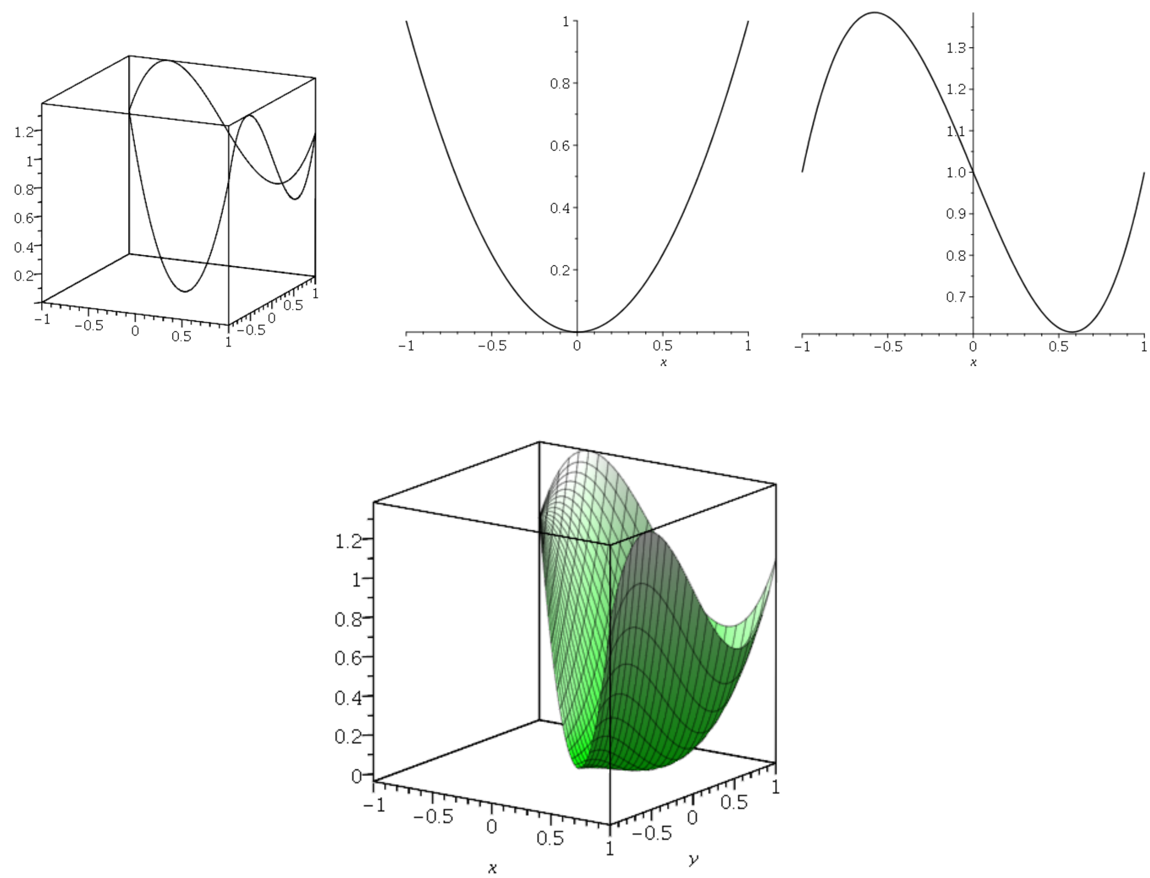
Nakoniec vypočítame funkčné hodnoty vo všetkých kandidátoch na globálny extrém:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}, \qquad f(0,0) = 0, \qquad f(-1,1) = 1,$$

$$f(1,-1) = 1, \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}}, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}},$$

$$f(1,1) = 1, \qquad f\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}}, \qquad f\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}.$$

Funkcia f nadobúda absolútne minimum v bode $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ a absolútne maximum v bodoch $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ a $(1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.



Obr. 5: Príklad 9

Príklad 10. Nájdite globálne extrémy funkcie

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - x.$$

na množine $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Opäť vyšetrujeme spojitú funkciu na kompaktnej množine, takže funkcia f na množine M skutočne nadobúda svoje maximum a minimum. Začneme stacionárnymi bodmi vo vnútri množiny M:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 1 \\ f_y &= 2y \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 3x^2 - 1 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

V množine M sa teda nachádzajú dva stacionárne body: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. Parciálne derivácie druhého rádu majú tvar:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x, \\ f_{xy} &= 0, \\ f_{yy} &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \det H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) &= \det \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{12}{\sqrt{3}} > 0 \\ \det H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) &= \det \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{12}{\sqrt{3}} < 0 \end{aligned}$$

Vzhľadom k nerovnosti $f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) > 0$ sa v bode $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ nachádza lokálne minimum, zatiaľčo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ je sedlový bod. Prvý kandidát na globálny extrém je bod $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Hranica množiny M je tvorená grafmi dvoch funkcií: $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$ pre $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $y(x) = -\sqrt{2 - x^2}$ pre $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Funkcia f je opäť párna v premennej y, keďže pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí $f(x, -y) = f(x, y)$. Stačí nám preto vyšetriť funkciu f len na vrchnej polkružnici určenej grafom funkcie $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$. Na tejto krivke má f nasledujúci tvar:

$$g(x) = f(x, y(x)) = f(x, \sqrt{2 - x^2}) = x^3 + \left(\sqrt{2 - x^2}\right)^2 - x = x^3 - x^2 - x + 2.$$

Venujme sa extrémom funkcie g. Jej stacionárne body sú riešením rovnice

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}.$$

Pre druhú deriváciu platí $g''(x) = 6x - 2$, $g''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$ a $g''(1) = 4 > 0$, čo znamená, že v bode $-\frac{1}{3}$ má funkcia g lokálne maximum a v bode 1 má lokálne minimum. Spočítame funkčné hodnoty g v stacionárnych bodoch a krajných bodoch intervalu $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$:

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{59}{27}, & g(1) &= 1, \\ g(-\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, & g(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

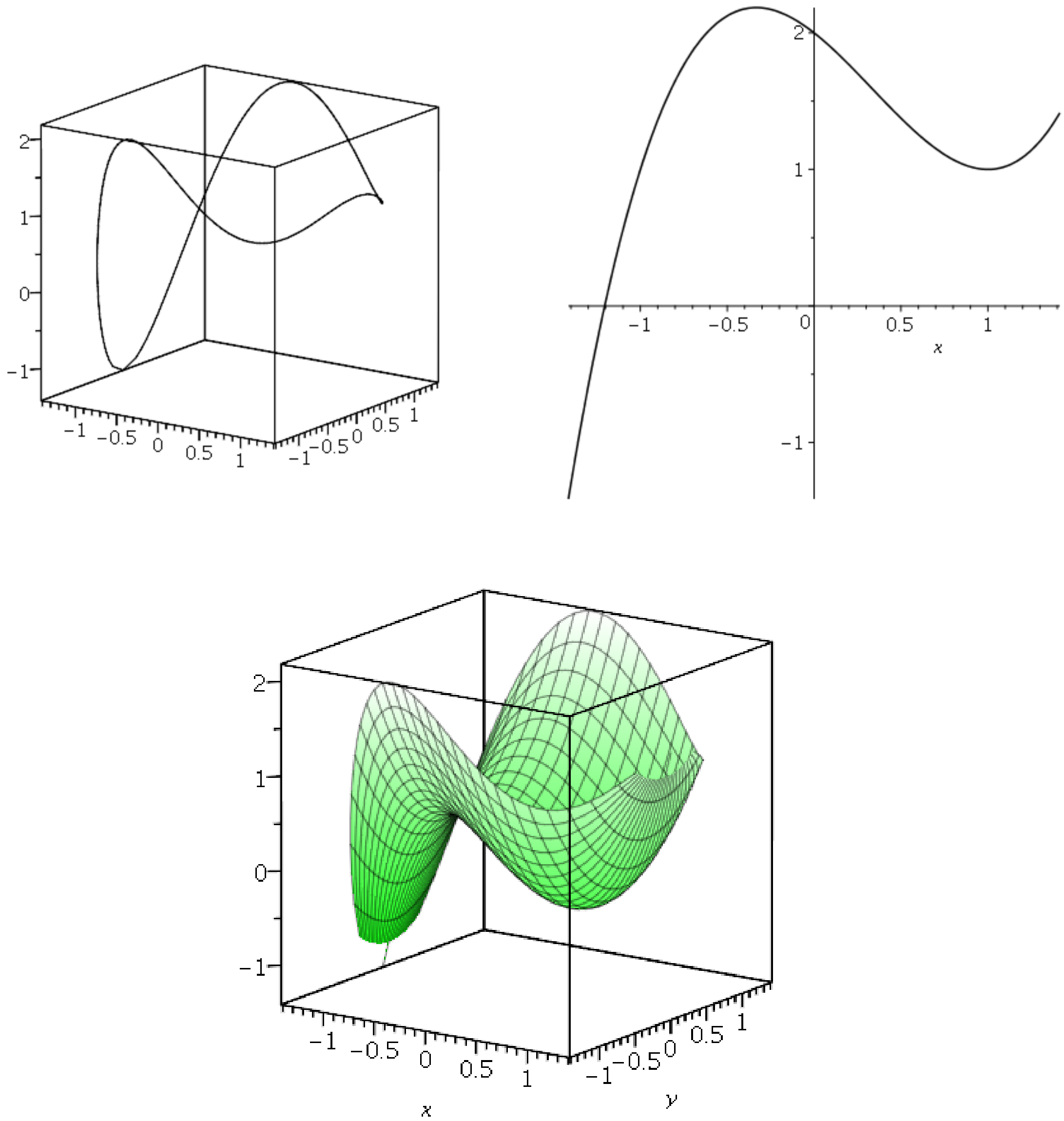
Porovnajúc tieto hodnoty s funkčnou hodnotou $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = -\frac{8}{27}$ zistíme, že globálne minimum funkcie f na množine M sa nachádza v bode $(-\sqrt{2}, 0)$ a globálne maximum v bodoch $(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ a $(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3})$. ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy II*, `http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana a DOŠLÝ, Ondřej. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*



Obr. 6: Príklad 10