MB152 – cvičení

Opakování, rozklad na parciální zlomky

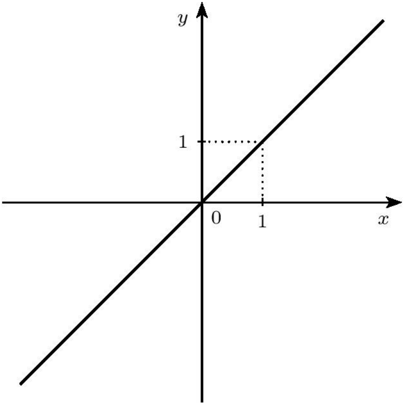
Petr Liška

Masarykova univerzita

7.10.2020

Lineární funkce

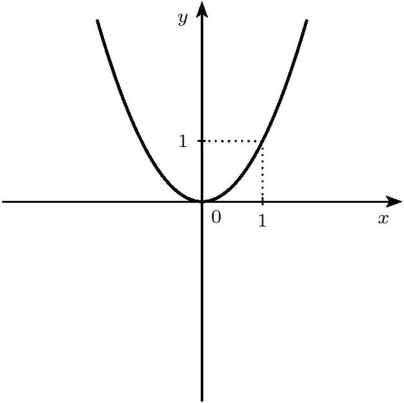
$$y = ax + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0$$



Přímka $y = x$

Kvadratická funkce

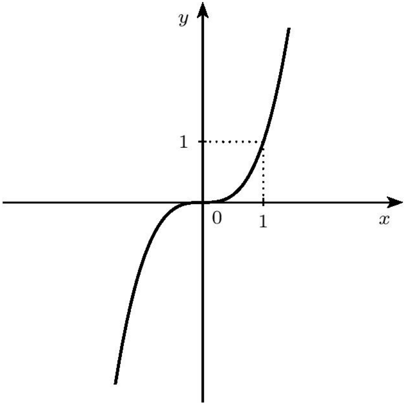
$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$



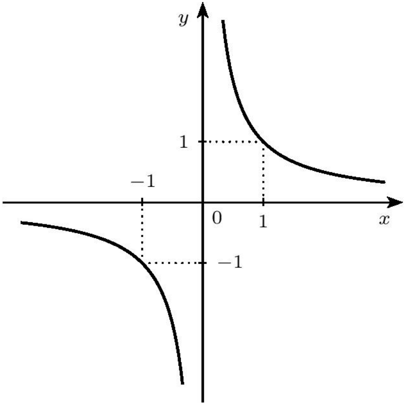
Parabola $y = x^2$

Mocninné funkce

$$y = ax^n, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$$



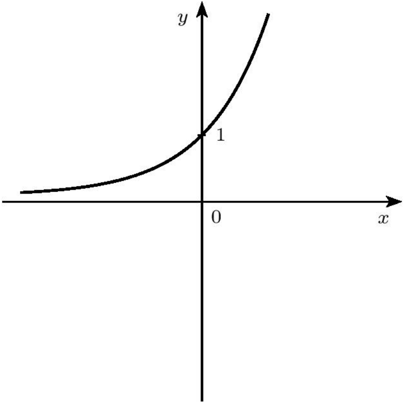
Kubická parabola $y = x^3$



Hyperbola $y = \frac{1}{x}$

Exponenciální funkce

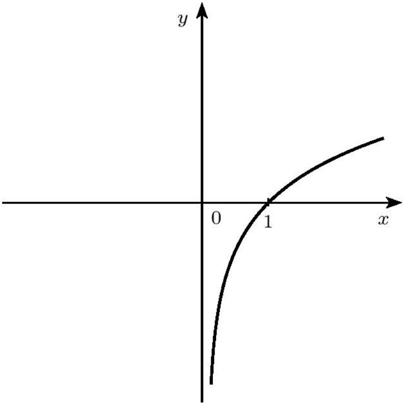
$$y = a^x, \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$$



Exponenciála $y = \mathrm{e}^x$

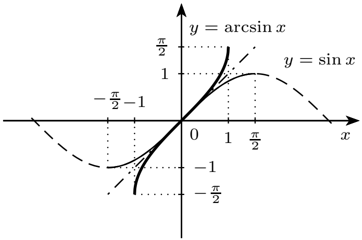
Logaritmická funkce

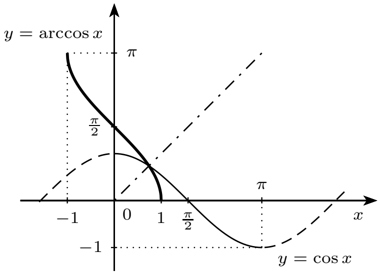
$$y = \log_a x, \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$$



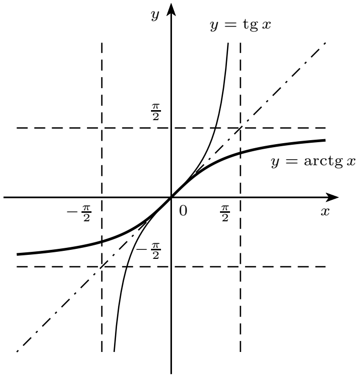
Logaritmická funkce $y = \ln x$

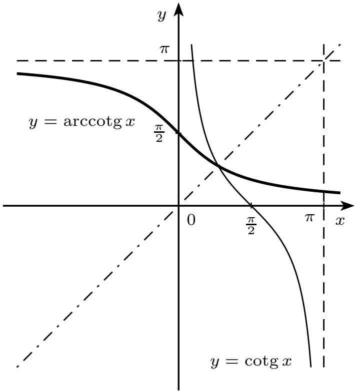
Gonimetrické a cyklometrické funkce





Gonimetrické a cyklometrické funkce





Posouvání grafu funkce

Posouvání grafu funkce

1. Graf funkce $f(x) + p$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y.

Posouvání grafu funkce

1. Graf funkce $f(x) + p$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y.
2. Graf funkce $f(x + p)$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy x. Pro p kladné posunujeme doleva, pro p záporné doprava.

Posouvání grafu funkce

1. Graf funkce $f(x) + p$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y.
2. Graf funkce $f(x + p)$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy x. Pro p kladné posunujeme doleva, pro p záporné doprava.
3. Graf funkce $-f(x)$ získáme tak, že část grafu funkce $f(x)$, která byla pod osou, symetricky zobrazíme nad osu x, a část grafu, která byla nad osou, symetricky zobrazíme pod osu x.

Posouvání grafu funkce

1. Graf funkce $f(x) + p$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy y.
2. Graf funkce $f(x + p)$ získáme posunutím o p jednotek grafu funkce $f(x)$ ve směru osy x. Pro p kladné posunujeme doleva, pro p záporné doprava.
3. Graf funkce $-f(x)$ získáme tak, že část grafu funkce $f(x)$, která byla pod osou, symetricky zobrazíme nad osu x, a část grafu, která byla nad osou, symetricky zobrazíme pod osu x.
4. Graf funkce $|f(x)|$ získáme tak, že část grafu funkce $f(x)$, která byla pod osou, symetricky zobrazíme nad osu x.

Metoda nulových bodů

Příklad

Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

Metoda nulových bodů

Příklad

Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

Řešení:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Metoda nulových bodů

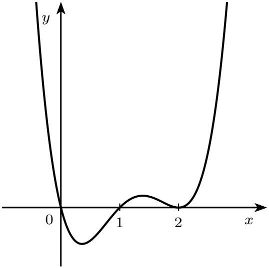
Příklad

Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2.$$

Řešení:

x	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$



Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

Určete znaménko racionální lomené funkce

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)^2}{(x+2)^3}.$$

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

Určete znaménko racionální lomené funkce

$$R(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)^2}{(x+2)^3}.$$

Řešení:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$R(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

a) Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k-násobné kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 10 = -B$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 10 = -B \quad \Longrightarrow \quad B = -10$$

$$x = 3$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x=1 \quad\Longrightarrow\quad 5=2A \quad\Longrightarrow\quad A=\frac{5}{2}$$

$$x=2 \quad\Longrightarrow\quad 10=-B \quad\Longrightarrow\quad B=-10$$

$$x=3 \quad\Longrightarrow\quad 17=2C$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 10 = -B \quad \Longrightarrow \quad B = -10$$

$$x = 3 \quad \Longrightarrow \quad 17 = 2C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{17}{2}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x^2+2x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$x=1 \quad\Longrightarrow\quad 5=2A \quad\Longrightarrow\quad A=\frac{5}{2}$$

$$x=2 \quad\Longrightarrow\quad 10=-B \quad\Longrightarrow\quad B=-10$$

$$x=3 \quad\Longrightarrow\quad 17=2C \quad\Longrightarrow\quad C=\frac{17}{2}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$\begin{aligned}
x^3 &: 0 = A \qquad\qquad + D \\
x^2 &: 0 = A + B \\
x^1 &: 0 = \qquad B + C \\
x^0 &: 1 = \qquad\qquad C,
\end{aligned}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A \qquad\qquad + D \\ x^2 &: 0 = A + B \\ x^1 &: 0 = \qquad B + C \\ x^0 &: 1 = \qquad\quad C, \end{aligned} \implies A = 1, B = -1, C = 1, D = -1$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{1}{x^3(x+1)}$$

Řešení:

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}.$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A \qquad\qquad\quad + D \\ x^2 &: 0 = A + B \\ x^1 &: 0 = \qquad B + C \\ x^0 &: 1 = \qquad\qquad C, \end{aligned} \quad \Longrightarrow A = 1, B = -1, C = 1, D = -1$$

$$R(x) = \frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}.$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2 + 4x}{x^4 - 16}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$x^2+4x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4).$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$x^2+4x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4).$$

$$\begin{aligned}
x^3 &: 0 = A + B + C \\
x^2 &: 1 = 2A - 2B + D \\
x^1 &: 4 = 4A + 4B - 4C \\
x^0 &: 0 = 8A - 8B - 4D,
\end{aligned}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$x^2+4x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4).$$

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A + B + C \\ x^2 &: 1 = 2A - 2B + D \\ x^1 &: 4 = 4A + 4B - 4C \\ x^0 &: 0 = 8A - 8B - 4D, \end{aligned} \implies A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$$

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16}$$

Řešení:

$$\frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

$$x^2+4x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4).$$

$$\begin{array}{l} x^3: 0 = A + B + C \\ x^2: 1 = 2A - 2B + D \\ x^1: 4 = 4A + 4B - 4C \\ x^0: 0 = 8A - 8B - 4D, \end{array} \implies A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8}, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$$

$$R(x) = \frac{x^2+4x}{x^4-16} = \frac{3}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1-x}{2(x^2+4)}.$$