

Diskrétní matematika – 11. týden

Vytvořující funkce a rekurence

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

- 1 Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
- 2 Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
- 3 Řešení rekurencí

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
Matematika drsně a svižně, e-text na
www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
- 2 Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
- 3 Řešení rekurencí

(Formální) mocninné řady

Definice

Bud' dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

(Formální) mocninné řady

Věta

Bud' (a_0, a_1, a_2, \dots) posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$.

(Formální) mocninné řady

Věta

Bud' (a_0, a_1, a_2, \dots) posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má $a(x)$ v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k},$$

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k,$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} \alpha^k \cdot x^k.$$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $$\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k.$$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k.$
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k.$
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k.$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.
- $(\sum a_k x^k) \cdot (\sum b_k x^k) = \sum c_k x^k$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Posloupnost (c_k) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_k), (b_k)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x} a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \dots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k) , je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \dots + 2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \dots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k) , je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \dots + 2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Rozklad na parciální zlomky!

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k , pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčítanec $A/(x - \alpha)$ sčítancem $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčítanec $A/(x - \alpha)$ sčítancem $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčítanec $A/(x - \alpha)$ sčítancem $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x - \alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1 - \beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme “otočením” polynomu – provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2 :

$$\begin{aligned} 1 - 5\frac{1}{t} + 6\frac{1}{t^2} &= (1 - 2\frac{1}{t})(1 - 3\frac{1}{t}) \\ t^2 - 5t + 6 &= (t - 2)(t - 3) \end{aligned}$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme “otočením” polynomu – provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2 :

$$\begin{aligned}1 - 5\frac{1}{t} + 6\frac{1}{t^2} &= (1 - 2\frac{1}{t})(1 - 3\frac{1}{t}) \\ t^2 - 5t + 6 &= (t - 2)(t - 3)\end{aligned}$$

Přitom poslední tvar je již klasický rozklad na kořenové činitele, ve kterém můžeme použít např. známé vzorečky pro kořeny kvadratického polynomu.

Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
- 2 Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
- 3 Řešení rekurencí

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf). Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n -tého členu posloupnosti.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf). Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n -tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[k = 1]$, $[2|k]$ apod.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf). Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n -tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [logický predikát] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[k = 1]$, $[2|k]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^k ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^k]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Naším cílem je tedy odvodit vztah pro k -tý člen posloupnosti.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Naším cílem je tedy odvodit vztah pro k -tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \lambda x} + \frac{B}{1 - \mu x},$$

kde λ , μ jsou kořeny $t^2 - t - 1$ a A , B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Odtud už vcelku snadno vyjde $F_k = A \cdot \lambda^k + B \cdot \mu^k$, jak to známe z dřívějších.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Uvážíme-li navíc, že $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k$. Navíc je vidět, že $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{k+1}/F_k = \lambda \approx 1.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Plán přednášky

- 1 Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
- 2 Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
- 3 **Řešení rekurencí**

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkce k . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkce k . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkce k . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkce k . Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

- 1 Zapišeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$).
- 2 Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
- 3 Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
- 4 Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^k udává a_k , tj. $a_k = [x^k]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_k = 3^k - 2^k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])
```

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```

if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])

```

- 1 Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k - 1$.
- 2 (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i -tý největší, je $\frac{1}{k}$.
- 3 Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i - 1$ a $k - i$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```

if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])

```

- 1 Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k - 1$.
- 2 (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i -tý největší, je $\frac{1}{k}$.
- 3 Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i - 1$ a $k - i$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_k = k - 1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} (C_{i-1} + C_{k-i}).$$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2 \sum_{i=1}^k C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2 \sum_{i=1}^k C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k \geq 0} kC_k x^k = \sum_{k \geq 0} k(k-1)x^k + 2 \sum_{k \geq 0} \sum_{i=1}^k C_{i-1} x^k$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2 \sum_{i=1}^k C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k \geq 0} kC_k x^k = \sum_{k \geq 0} k(k-1)x^k + 2 \sum_{k \geq 0} \sum_{i=1}^k C_{i-1} x^k$
- $x C'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2 \frac{x C(x)}{1-x}$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2 \sum_{i=1}^k C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k \geq 0} kC_k x^k = \sum_{k \geq 0} k(k-1)x^k + 2 \sum_{k \geq 0} \sum_{i=1}^k C_{i-1} x^k$
- $x C'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2 \frac{x C(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu $((1-x)^2 C(x))' = \frac{2x}{1-x}$, a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \left(\ln \frac{1}{1-x} - x \right),$$

odkud konečně $C_k = 2(k+1)(H_{k+1} - 1) - 2k$.