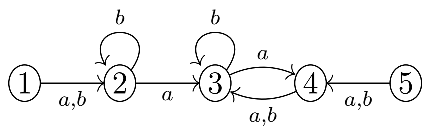
Algebra I – podzim 2018 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda množina $H = \{\, (2^z, 2^{z+1} - 2) \mid z \in \mathbb{Z} \,\}$ je podgrupa, případně normální podgrupa, grupy $(G, \diamond)$, kde $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q}$ a $\diamond$ je operace definovaná pro všechna $(p, q), (r, s) \in G$ předpisem
$$(p, q) \diamond (r, s) = (2pr, 2qr + 2r + s).$$

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Nechť
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ h & g & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{Z}[x],\ h \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x] \right\}.$$
Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((G, \cdot) \times (\mathbb{Z}, +)\big)/H$, kde
$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ h & g & 1 \end{pmatrix}, \frac{2f(1)}{3} \right) \in G \times \mathbb{Z} \;\middle|\; h(1) \in \mathbb{Q},\ 3 \text{ dělí } g(2) - f(2) \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1) \cdot \sqrt{3}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 6\alpha + 2},$$
kde $\alpha \in \mathbb{C}$ splňuje rovnost $\alpha^4 + 6\alpha = 2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy a jejích dvou podgrup H a K takových, že $|H| > 2$, $|K| > 2$ a $|H \cap K| = 2$.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad tří okruhů R, S a T takových, že R a T jsou obory integrity a S není, a surjektivních homomorfismů $\varphi\colon R \to S$ a $\psi\colon S \to T$.

8. **(5 bodů)** Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálních typů.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý pologrupový homomorfismus mezi dvěma grupami je homomorfismem grupovým. Vycházejte přitom přímo z definic homomorfismů a grupy.