Algebra I – podzim 2020 – 5. termín

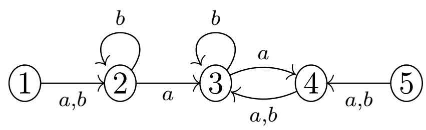
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Uvažujme grupu $(G, \bullet)$, kde $G = S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$, přičemž $S_{\mathbb{N}}$ značí množinu všech permutací množiny $\mathbb{N}$, a operace $\bullet$ je definovaná předpisem

$$(f, g) \bullet (h, k) = (f \circ h, h^{-1} \circ g \circ h \circ k).$$

Pro každou z následujících množin rozhodněte, zda tvoří normální podgrupu grupy $(G, \bullet)$.
1) $H = \{\, (f, f) \mid f \in S_{\mathbb{N}} \,\}$
2) $K = \{\, (f, f^{-1}) \mid f \in S_{\mathbb{N}} \,\}$

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((\mathbb{Z}, +) \times (G, \cdot)\big)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ f & 2^p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Q}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \left(p, \begin{pmatrix} 4^p & 0 \\ f & 4^p \end{pmatrix} \right) \mid p \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{Q}[x],\ f(-1) = -f(1) \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt[4]{8} \cdot \mathrm{i} + \sqrt[4]{2} \cdot \mathrm{i} - \sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 + \alpha^4 - 2\alpha^3 - \alpha^2 + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $(\alpha + 2) \cdot \alpha^2 = 2$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu, který má právě tři maximální ideály.

7. (10 bodů) Dejte příklad netriviálních grup G, H, K takových, že existují surjektivní homomorfismy G do K a H do K, ale neexistuje surjektivní homomorfismus G do H ani H do G.