Logika a regulární jazyky

Václav Brožek

10. listopad 2010

Meta-poznámky

- dotazy a poznámky během přednášky vítány
- po přednášce rovněž vítány, např. na bleble@mail.muni.cz

Meta-poznámky

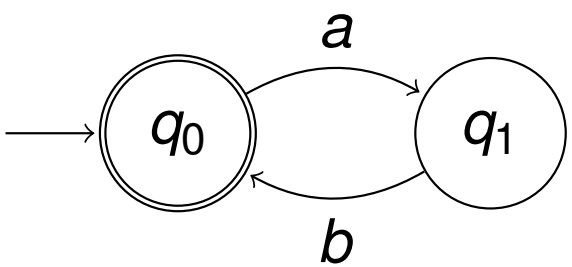
- dotazy a poznámky během přednášky vítány
- po přednášce rovněž vítány, např. na bleble@mail.muni.cz
- literatura:
  Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Sematics, 1990 (signatura R269 v knihovně FI)
  . . . a mnoho dalších

Osnova

Různé způsoby popisu jazyků

Popis operací

1. Jsi-li na konci, akceptuj.
2. Čti a.
3. Čti b.
4. Jdi na 1.

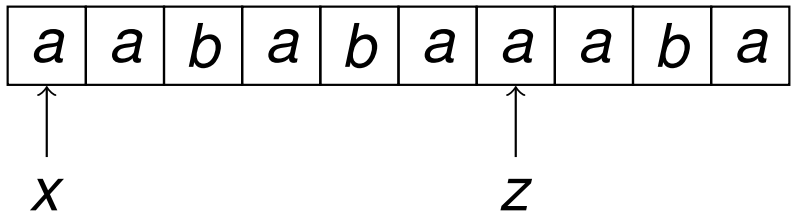


Popis výsledku

- První je a.
- Poslední je b.
- a a b se střídají.

?

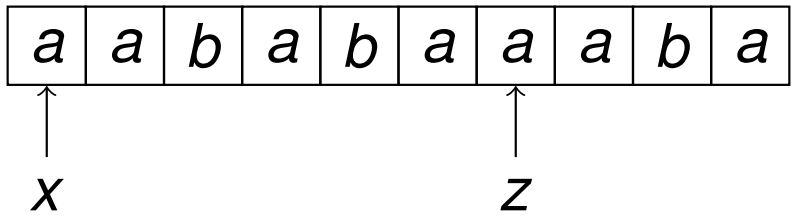
Logika prvního řádu



$x, y, z \ldots$	pozice
$P_a(x)$	na pozici x je písmeno a
$x < y$	pozice x je před y
$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky (poznámka: negace víc podob)
$\forall x, \exists x$	kvantifikace

\+ navíc rovnost $x = y$

Logika prvního řádu



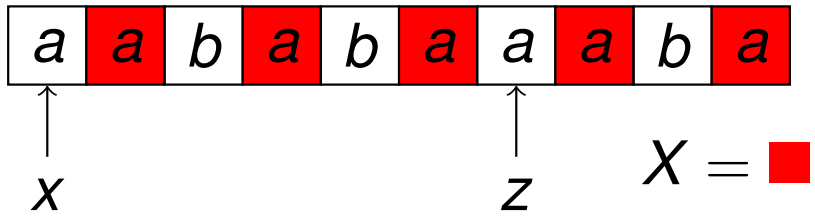
$x, y, z \ldots$	pozice
$P_a(x)$	na pozici x je písmeno a
$x < y$	pozice x je před y
$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky (poznámka: negace víc podob)
$\forall x, \exists x$	kvantifikace

\+ navíc rovnost $x = y$

Cvičení

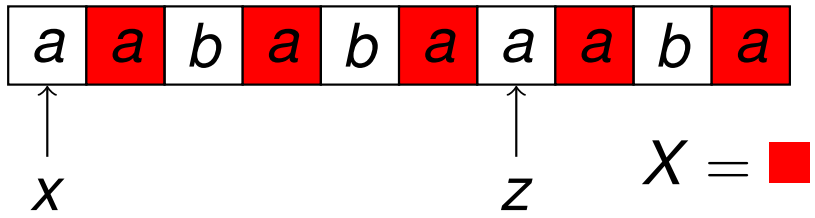
Co znamená $\exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$?

Monadická logika druhého řádu (MSO)



$x, y, z \ldots$	pozice	$X, Y, Z \ldots$	množiny pozic
$P_a(x)$	na pozici x je písmeno a	$x \in X$	x leží v X
$x < y$	pozice x je před y		
$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky		
$\forall x, \exists x$	kvantifikace	$\forall X, \exists X$	

Monadická logika druhého řádu (MSO)



$x, y, z \ldots$	pozice	$X, Y, Z \ldots$	množiny pozic
$P_a(x)$	na pozici x je písmeno a	$x \in X$	x leží v X
$x < y$	pozice x je před y		
$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky		
$\forall x, \exists x$	kvantifikace	$\forall X, \exists X$	

Cvičení

$$\exists X : \quad \big[\forall x, y : ((x < y) \wedge (\forall z : x \not< z \vee z \not< y) \implies (x \in X \iff y \notin X)\big]$$
$$\wedge \big[\forall x : x \in X \implies (P_a(x) \wedge \exists y : y < x)\big]$$

Sentence a formule MSO

Proměnné ve formuli dvojího typu:

- vázané pomocí kvantifikátorů
- volné

$$\phi(y, Y) \equiv \exists X : \forall x : y \in X \vee x \in Y$$

Volné se zpravidla píší za jméno formule.

sentence = uzavřená formule = formule bez volných proměnných

Jazyky zadané sentencí MSO

Sentence MSO ϕ = vlastnost slov.
Slovo $w \in \Sigma^*$ buď vlastnost ϕ má $(w \models \phi)$, nebo nemá $(w \not\models \phi)$.
Například:

$$aba \models \exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$
$$bab \not\models \exists x : P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$$
$$\varepsilon \models \exists X : \forall x : \neg(\exists y : (x \in X \wedge y \notin X) \vee P_b(y))$$

Definice

$L(\phi) := \{w \in \Sigma^* \mid w \models \phi\}$

Pravdivost formulí

Kdy má slovo w vlastnost $\phi(X, Y, \ldots, x, y, \ldots)$?
Potřebujeme valuaci.

Pravdivost formulí

Kdy má slovo w vlastnost $\phi(X, Y, \ldots, x, y, \ldots)$?
Potřebujeme valuaci.

Valuace přiřadí hodnoty volným proměnným. Například pro:

$$\nu_1(x) = 1,\ \nu_1(y) = 1,\ \nu_1(X) = \{1, 3\}$$
$$\nu_2(x) = 3,\ \nu_2(y) = 1,\ \nu_2(X) = \emptyset$$

$aba, \nu_1 \models P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$

$aba, \nu_2 \not\models P_a(x) \wedge (\forall z : z \not< x)$

$bab, \nu_1 \models \exists x, y : P_b(x) \wedge P_b(y) \wedge x < y \wedge x \in X \wedge y \in X$

$bab, \nu_2 \not\models \exists x, y : P_b(x) \wedge P_b(y) \wedge x < y \wedge x \in X \wedge y \in X$

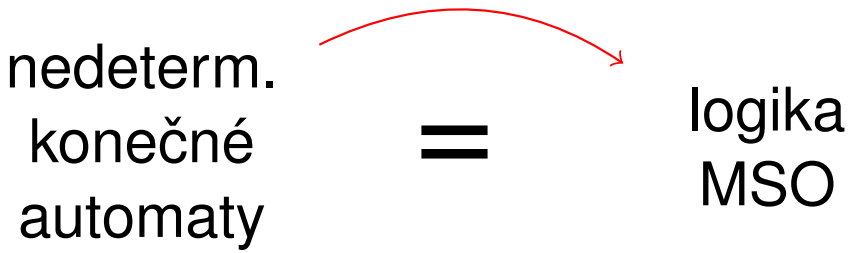
Osnova

Automaty = logika

Věta

Regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO.

Automaty = logika

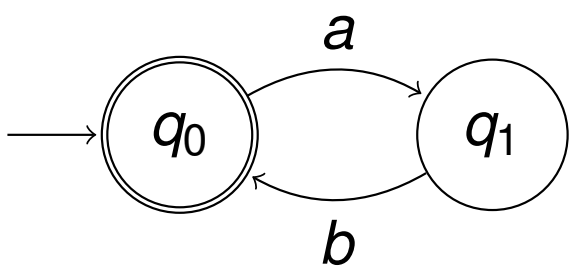


Věta

Regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO.

Automat $\longrightarrow$ sentence MSO

$\mathcal{A}$:



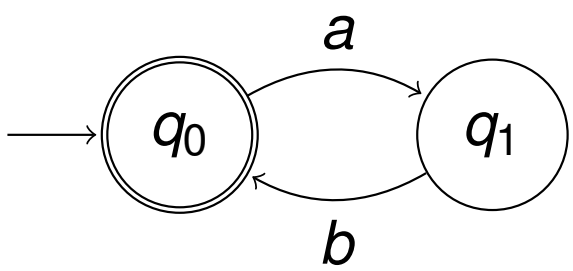
$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

existuje akceptující běh $\mathcal{A}$ pod w.

Automat $\longrightarrow$ sentence MSO

$\mathcal{A}$:



$$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

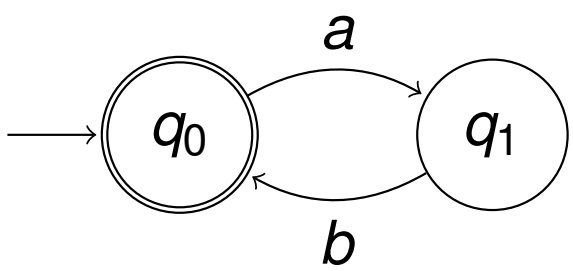
$\exists \varrho : \{1, \ldots, |w|\} \to \{q_0, q_1\}$ tak, že

- $q_0 \xrightarrow{w(1)} \varrho(1)$
- pro všechna i, $1 < i \leq |w|$: $\varrho(i-1) \xrightarrow{w(i)} \varrho(i)$
- $\varrho(|w|) \in F = \{q_0\}$

(nebo $w = \varepsilon$.)

Automat → sentence MSO

$\mathcal{A}$:



$L(\mathcal{A}) = L((ab)^*)$

$w \in L(\mathcal{A})$ právě když

$\exists X_0, X_1 : \forall x : x \in X_0 \iff x \notin X_1$ $\quad (\exists \varrho : \{1, \ldots, |w|\} \to \{q_0, q_1\})$

- $\wedge\ \forall x : \mathit{First}(x) \implies (P_a(x) \wedge x \in X_1)$ $\quad q_0 \xrightarrow{w(1)} \varrho(1)$
- $\wedge\ \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies$
  $(x \in X_0 \wedge P_a(y) \wedge y \in X_1) \vee (x \in X_1 \wedge P_b(y) \wedge y \in X_0)$
  pro všechna i, $1 < i \leq |w|$: $\varrho(i-1) \xrightarrow{w(i)} \varrho(i)$
- $\wedge\ \forall x : \mathit{Last}(x) \implies x \in X_0$ $\quad \varrho(|w|) \in F = \{q_0\}$

Cvičení

Zadefinujte následující formule (s volnými proměnnými) tak, aby pro každé slovo w a valuaci ν platilo

- $w, \nu \models \mathit{First}(x)$ právě když $\nu(x)$ je první pozice
- $w, \nu \models \mathit{Last}(x)$ právě když $\nu(x)$ je poslední pozice
- $w, \nu \models \mathit{Succ}(x, y)$ právě když $\nu(y) = \nu(x) + 1$

Automat $\longrightarrow$ sentence MSO – obecný postup

NKA $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$ $\rightarrow$ sentence MSO ϕ t.ž. $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

$$\phi := \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \Big(\forall x : \bigvee_{q\in Q} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q\neq r\in Q} (x \in X_q \implies x \notin X_r)$$

$$\wedge \forall x : \mathit{First}(x) \implies \bigvee_{a\in\Sigma, q_0 \xrightarrow{a} q} P_a(x) \wedge x \in X_q$$

$$\wedge \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies \bigvee_{a\in\Sigma, q \xrightarrow{a} r} x \in X_q \wedge P_a(x) \wedge y \in X_r$$

$$\wedge \forall x : \mathit{Last}(x) \implies \bigvee_{q\in F} x \in X_q\Big)$$

Automat $\longrightarrow$ sentence MSO – obecný postup

NKA $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$ $\rightarrow$ sentence MSO ϕ t.ž. $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

$$\phi := \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \Big(\forall x : \bigvee_{q\in Q} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q\neq r\in Q} (x \in X_q \implies x \notin X_r)$$

$$\wedge \forall x : \mathit{First}(x) \implies \bigvee_{a\in\Sigma, q_0 \xrightarrow{a} q} P_a(x) \wedge x \in X_q$$

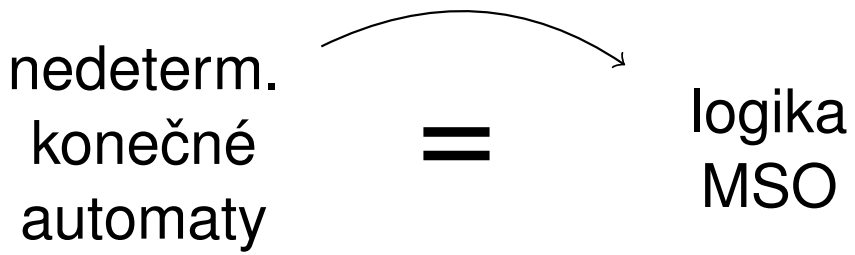
$$\wedge \forall x, y : \mathit{Succ}(x, y) \implies \bigvee_{a\in\Sigma, q \xrightarrow{a} r} x \in X_q \wedge P_a(x) \wedge y \in X_r$$

$$\wedge \forall x : \mathit{Last}(x) \implies \bigvee_{q\in F} x \in X_q\Big)$$

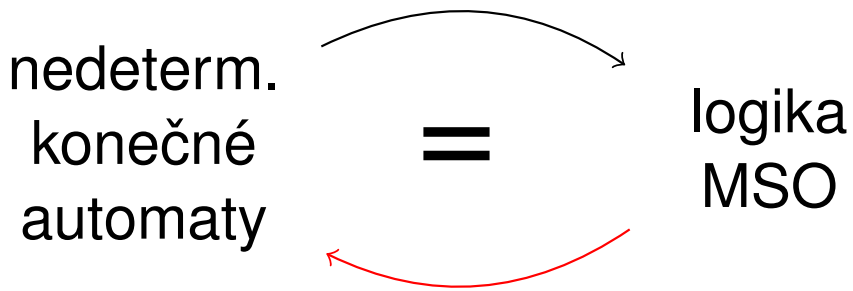
Cvičení

Najděte chybu.

Automaty = logika



Automaty = logika



Sentence MSO $\longrightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

sentenci MSO ϕ

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře ϕ.

Sentence MSO $\longrightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

sentenci MSO ϕ

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře ϕ.

Ale podformule ϕ nemusí být sentence!
$\exists x : x < x$ má podformuli $x < x$.

Formule MSO $\longrightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

formuli MSO $\phi(X, \ldots, x, \ldots)$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi(X, \ldots, x, \ldots)) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře ϕ.

„Čistá” MSO – logika bez prvního řádu

Pro zjednodušení konstrukce odstraníme proměnné 1. řádu:

MSO		„Čistá” MSO	
$x, X \ldots$	proměnné	$X \ldots$	proměnné (jen 2. řádu)
$P_a(x)$	a na pozici x	$P_a(X)$	a na všech pozicích z X
$x \in X$	x leží v X	$X \subseteq Y$	X podmnožina Y
$x < y$	pozice x je před y	$X < Y$	něco z X je před Y
$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky	$\wedge, \vee, \neg$	logické spojky
$\forall x, \exists X$	kvantifikace	$\exists X$	kvantifikace (jen 2. řád)
		$Sng(X)$	$\lvert X \rvert = 1$

Ekvivalence MSO a čisté MSO

Zápis čisté MSO v MSO:

$$P_a(X) \equiv \forall x : x \in X \implies P_a(x)$$
$$X \subseteq Y \equiv \forall x : x \in X \implies x \in Y$$
$$Sng(X) \equiv \exists x : x \in X \wedge \forall y : y = x \vee y \notin X$$
$$X < Y \equiv \exists x : x \in X \wedge (\forall y : y \in Y \implies x < y)$$

Zápis MSO v čisté MSO:
Každou x nahradíme S_x a přidáme $\wedge Sng(S_x)$.

$$P_a(x) \equiv P_a(S_x)$$
$$x \in X \equiv S_x \subseteq X$$
$$x < y \equiv S_x < S_y$$

Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

formuli čisté MSO $\phi(X, \ldots)$

nedeterministický KA $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi(X, \ldots)) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře ϕ.

Co je $L(\phi(X, \ldots))$? Aneb kódování valuací

Pro formuli $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ a slovo $w \in \Sigma^*$ zakódujeme valuaci ν jako slovo $w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^*$. Například:

$k = 2$, $w = abc$, $\nu : X_1 \mapsto \{1,3\}, X_2 \mapsto \{2\}$ dá

$$w_\nu = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Co je $L(\phi(X, \ldots))$? Aneb kódování valuací

Pro formuli $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ a slovo $w \in \Sigma^*$ zakódujeme valuaci ν jako slovo $w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^*$. Například:

$k = 2$, $w = abc$, $\nu : X_1 \mapsto \{1,3\}, X_2 \mapsto \{2\}$ dá

$$w_\nu = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

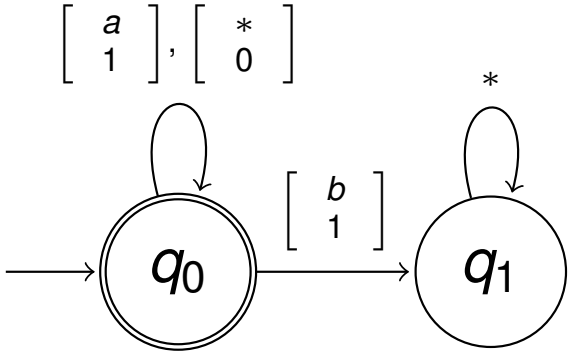
Definice

$L(\phi(X_1, \ldots, X_k)) := \{w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^* \mid w, \nu \models \phi(X_1, \ldots, X_k)\}$

Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

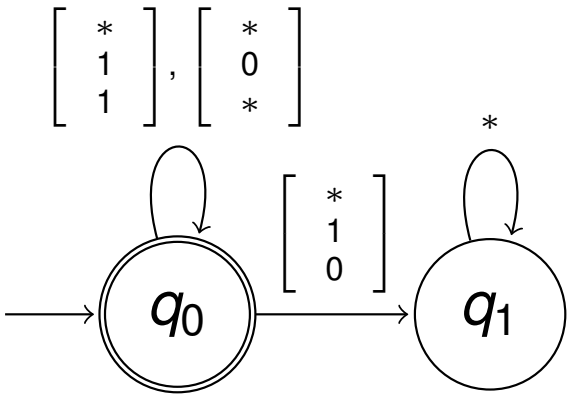
$P_a(X_1)$



Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

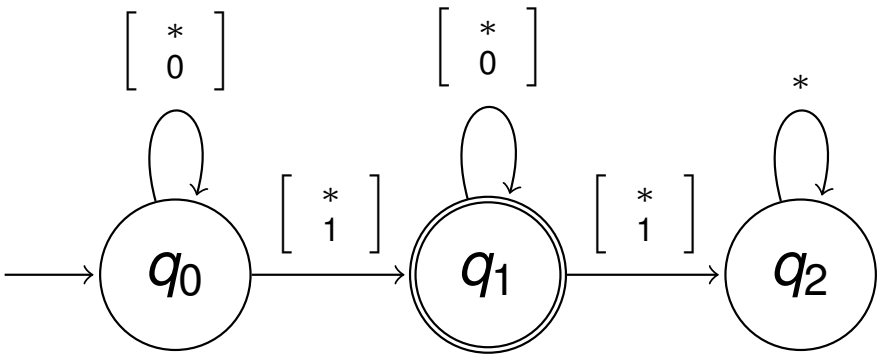
$X_1 \subseteq X_2$



Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

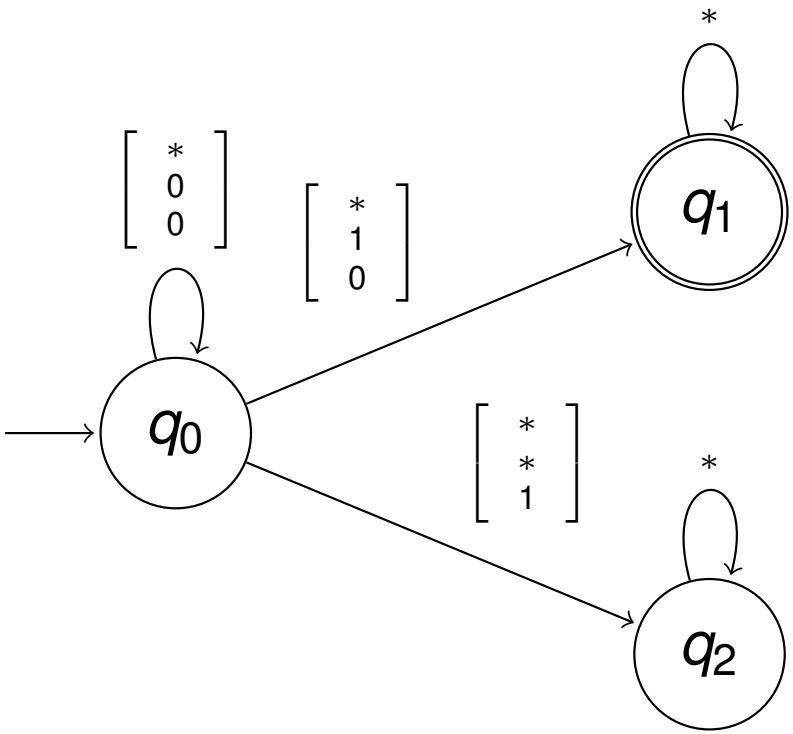
$Sng(X_1)$



Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Bázové kroky:

$X_1 < X_2$



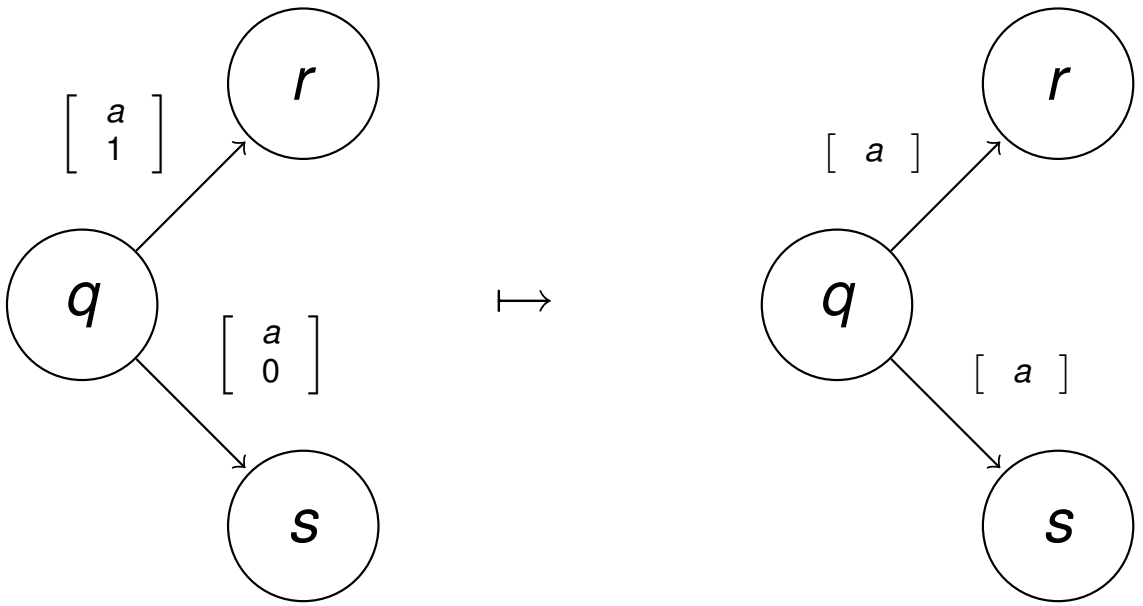
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.
Logické operace $\vee, \wedge, \neg$ přejdou na $\cup$, $\cap$ a komplement.

Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.
Kvantifikace:

$\exists X_1 : \phi(X_1)$



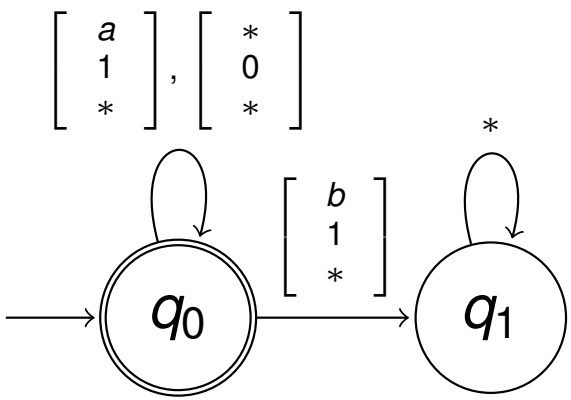
Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

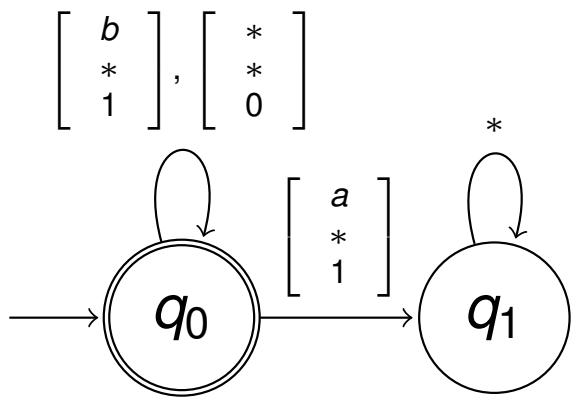
Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

$P_a(X_1)$



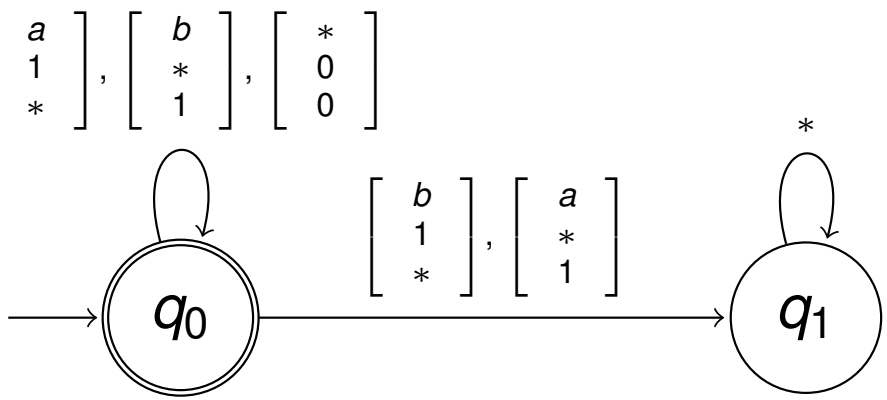
$P_b(X_2)$



Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

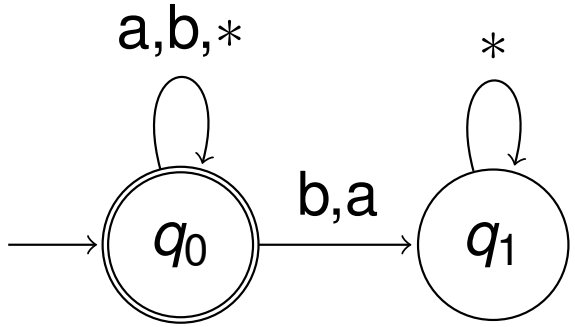
$P_a(X_1) \wedge P_b(X_2)$



Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

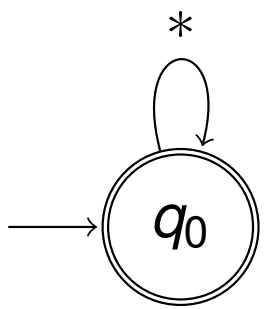
$$\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2)$$



Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

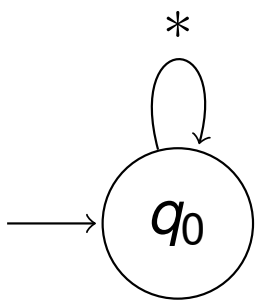
$$\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2)$$



Příklad

$$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$$

$\neg(\exists X_1, X_2 : P_a(X_1) \wedge P_b(X_2))$



Poznámky

Existuje i alternativní důkaz přes *rank* formulí.

- Rank formule = maximální počet zanoření kvantifikátorů.
- Existuje jen konečně mnoho formulí ranku $\leq k$ až na ekvivalenci – třída ekvivalentních formulí = *typ*.
- Existuje automat počítající typy pro fixní rank.

Tento důkaz se vyhne indukci na formulích, ale nedává vhled do detailů převodu.

Poznámky

- Aplikací převodů: sentence $\rightarrow$ automat $\rightarrow$ sentence dostaneme pro každou ϕ její normální formu:

$$\phi \equiv \exists X_1, \ldots, X_k : \psi(X_1, \ldots, X_k)$$

kde ψ je bez kvantifikátorů druhého řádu.

Poznámky

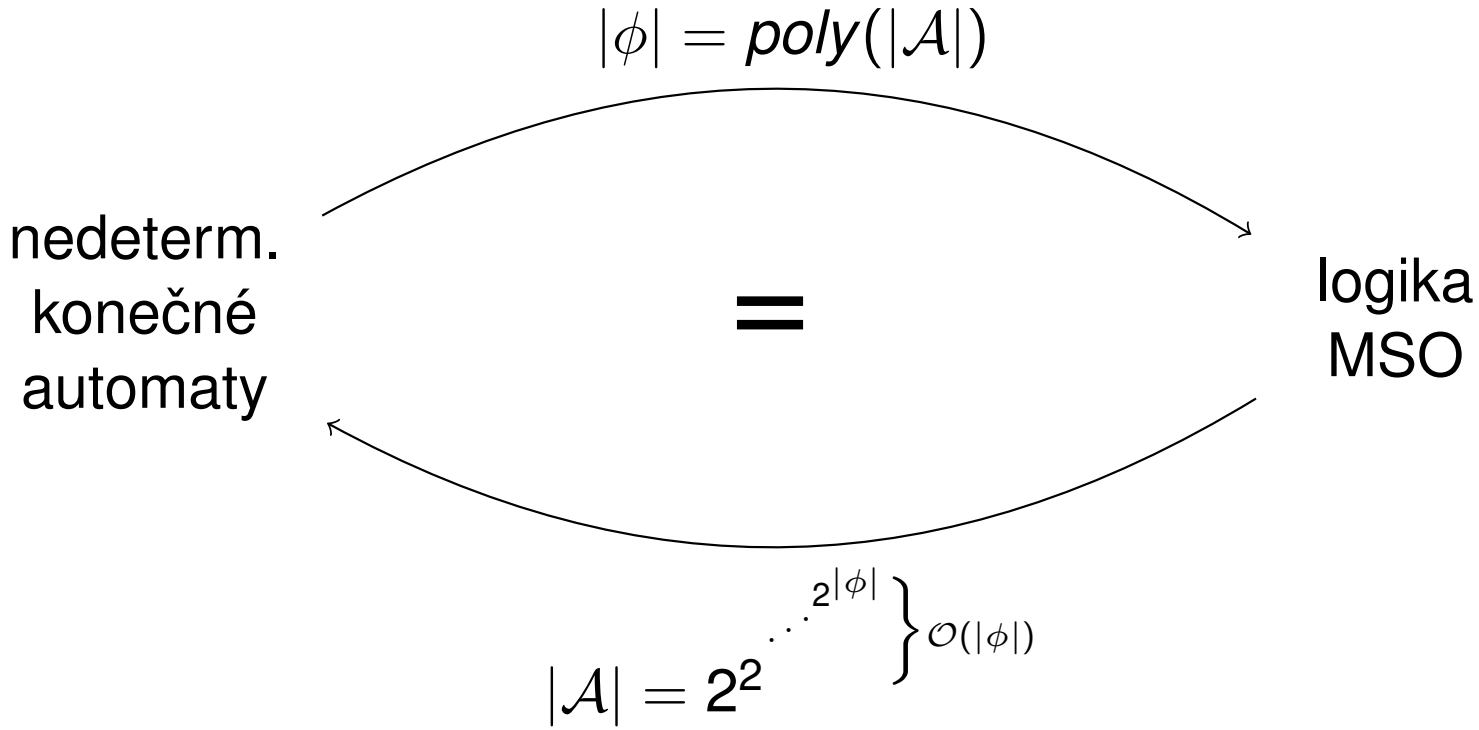
- Aplikací převodů: sentence $\rightarrow$ automat $\rightarrow$ sentence dostaneme pro každou ϕ její normální formu:

$$\phi \equiv \exists X_1, \ldots, X_k : \psi(X_1, \ldots, X_k)$$

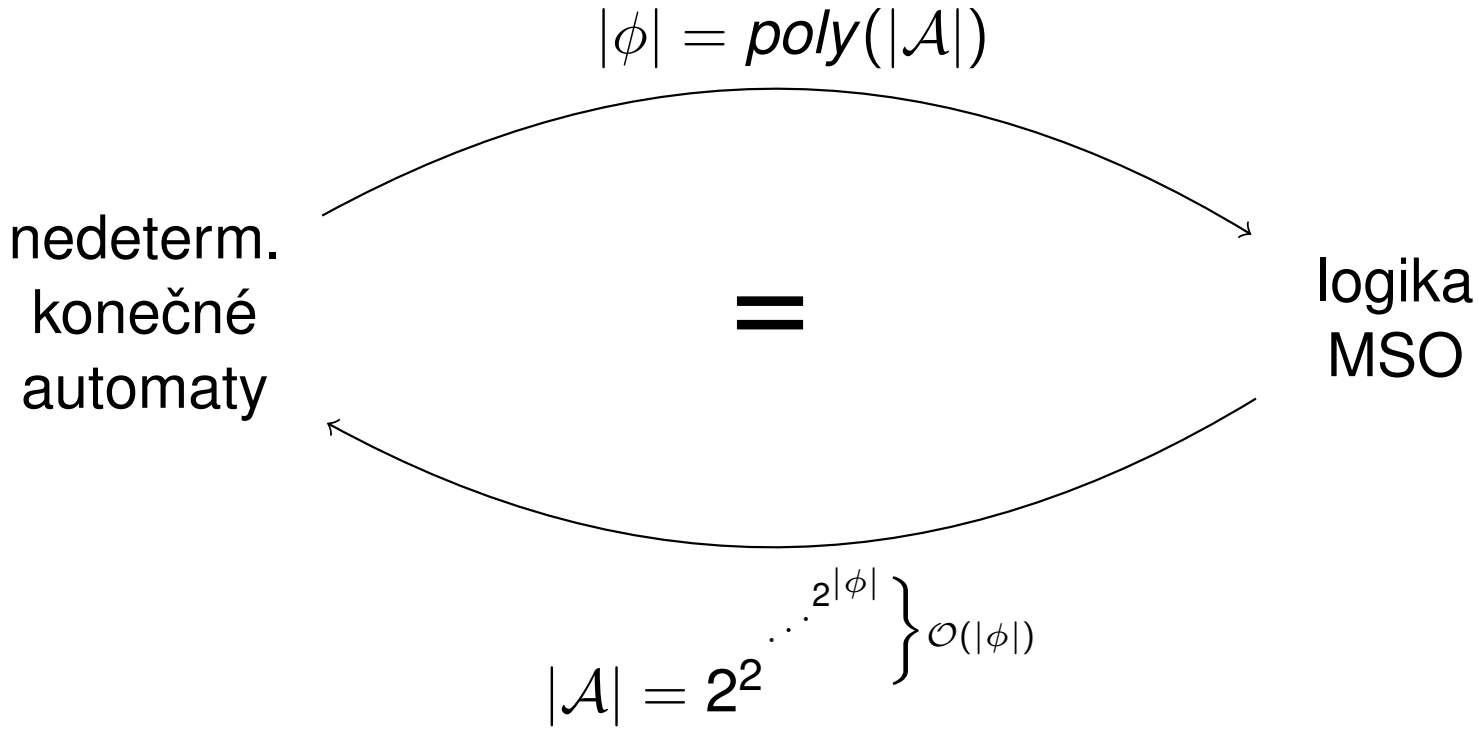
  kde ψ je bez kvantifikátorů druhého řádu.
- splnitelnost pro MSO rozhodnutelná nejen nad slovy, ale i nad stromy. Ovšem už pro acyklické grafy je nerozhodnutelná.

Osnova

Kolik stojí převod



Kolik stojí převod



$$\neg(\exists X_1 : \neg(\exists X_2 : \neg(\ldots \neg(\exists X_k : \phi(X_1, X_2, \ldots, X_k)) \ldots)))$$

- $\exists$ vytváří nedeterminismus
- $\neg$ = komplementace $\longrightarrow$ exponenciální nárust

Drahý převod: formule $\longrightarrow$ automat

Definice

$G(1) := 1$, *a pro všechna* $n > 1$*:* $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$

Drahý převod: formule $\longrightarrow$ automat

Definice

$G(1) := 1$, *a pro všechna* $n > 1$*:* $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$

Cvičení

Dokažte: $\forall n \geq 1 : 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}n+1} > G(n) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}n}$.

Drahý převod: formule → automat

Definice

$G(1) := 1$, *a pro všechna* $n > 1$*:* $G(n) := G(n-1) \cdot 2^{G(n-1)}$

Cvičení

Dokažte: $\forall n \geq 1 : 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\}n+1} > G(n) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\}n}$.

Věta (Stockmeyer & Meyer, 1974)

Existuje posloupnost MSO sentencí $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tak, že:*

- $|\phi_n| \in \mathcal{O}(2^n)$
- *pro každý nedeterministický KA* $\mathcal{A}_n$*:*
  $L(\mathcal{A}_n) = L(\phi_n) \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

Cvičení

Dokažte:

1. L_n je regulární.

Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

Cvičení

Dokažte:

1. L_n je regulární.
2. pro každý *nedeterministický* KA $\mathcal{A}_n$:
   $L(\mathcal{A}_n) = L_n \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

Důkaz

Definujeme:

$$L_n := \{\overbrace{aaa\cdots a}^{G(n)}\}$$

Cvičení

Dokažte:

1. L_n je regulární.
2. pro každý *nedeterministický* KA $\mathcal{A}_n$:
   $L(\mathcal{A}_n) = L_n \implies |\mathcal{A}_n| \geq G(n)$

Zbývá najít formuli ϕ_n tak, aby

- $|\phi_n| \in \mathcal{O}(2^n)$
- $L_n = L(\phi_n)$

- Indukcí na n sestrojíme formule $\theta_n(x, y)$ tak, že

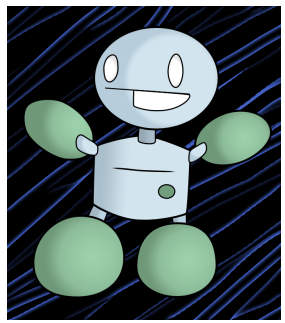
  $$w, \nu \models \theta_n(x, y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x, y)$.

- Indukcí na n sestrojíme formule $\theta_n(x, y)$ tak, že

$$w, \nu \models \theta_n(x, y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x, y)$.



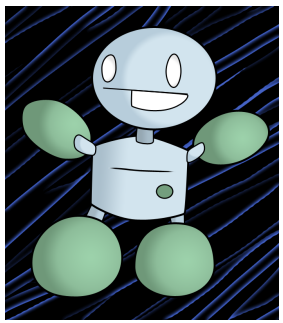
- indukční báze je jednoduchá:

$$\theta_1(x, y) := x = y$$

- Indukcí na n sestrojíme formule $\theta_n(x, y)$ tak, že

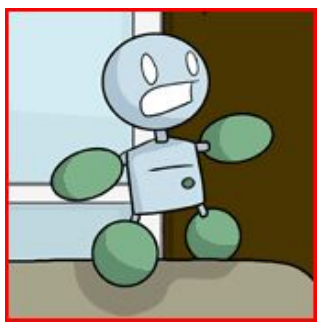
$$w, \nu \models \theta_n(x, y) \quad \text{právě když} \quad \nu(y) - (\nu(x) - 1) = G(n).$$

- Pak $\phi_n := \exists x, y : \mathit{First}(x) \wedge \mathit{Last}(y) \wedge \theta_n(x, y)$.



- indukční báze je jednoduchá:

$$\theta_1(x, y) := x = y$$



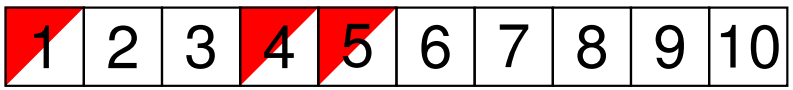
questionablecontent.net

indukční krok je složitější...

$$\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y : Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\ldots,y\}$$
$$\wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n)$$
$$\wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)}$$

$$\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y : Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\ldots,y\}$$
$$\wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n)$$
$$\wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)}$$

Kódování intervalů pomocí množiny pozic Y:



$Y =$ 

zadané intervaly: $\{1,2,3\},\ \{4\},\ \{5,6,7,8,9,10\}$.
Formule $Int(r,s,Y)$ testuje, že $\{r,\ldots,s\}$ je interval dle Y:

$$Int(r,s,Y) := r \in Y \wedge r \leq s$$
$$\wedge\ (\forall z : Succ(s,z) \implies z \in Y)$$
$$\wedge\ (\forall z : r < z \leq s \implies z \notin Y)$$

Y zadává intervaly na $\{x, \ldots, y\}$

$$\equiv$$

$$x \in Y \wedge \forall z : Succ(y, z) \implies z \in Y$$

tyto intervaly jsou délky $G(n)$

$$\equiv$$

$$\forall r, s : (x \leq r, s \leq y \wedge Int(r, s, Y)) \implies \theta_n(r, s)$$

intervalů je $2^{G(n)}$

$\equiv$

$\exists J$: první interval kóduje 0

$\wedge$ poslední interval kóduje $2^{G(n)} - 1$

$\wedge$ po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1

intervalů je $2^{G(n)}$

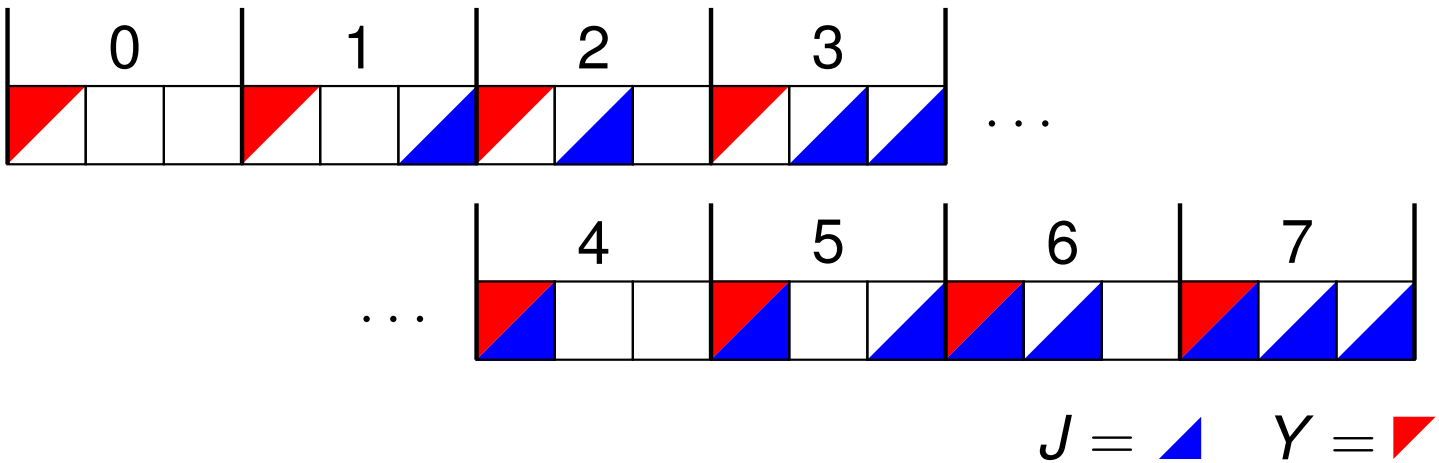
$\equiv$

$\exists J$: první interval kóduje 0

$\wedge$ poslední interval kóduje $2^{G(n)} - 1$

$\wedge$ po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1

Kódování čísel pomocí množiny J:



první interval kóduje 0

$$\equiv$$

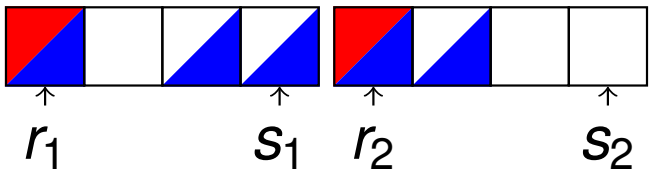
$$\forall s, t : (Int(x, s, Y) \wedge x \leq t \leq s) \implies t \notin J$$

poslední interval kóduje $2^{G(n)} - 1$

$$\equiv$$

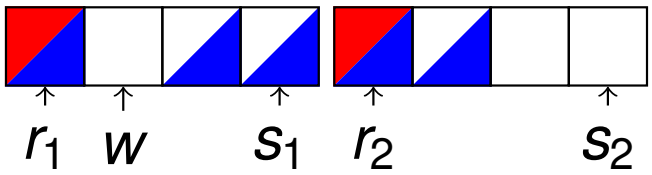
$$\forall r, t : (Int(r, y, Y) \wedge r \leq t \leq y) \implies t \in J$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



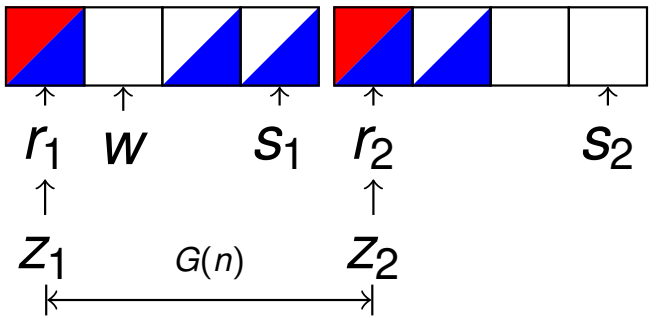
$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$
$$\wedge \mathit{Int}(r_1, s_1, Y) \wedge \mathit{Int}(r_2, s_2, Y) \wedge \mathit{Succ}(s_1, r_2) \Big)$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$
$$\wedge \mathit{Int}(r_1, s_1, Y) \wedge \mathit{Int}(r_2, s_2, Y) \wedge \mathit{Succ}(s_1, r_2) \Big)$$
$$\Longrightarrow \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J)$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \le r_1, s_1, r_2, s_2 \le y$$

$$\wedge\, Int(r_1, s_1, Y) \wedge Int(r_2, s_2, Y) \wedge Succ(s_1, r_2) \Big)$$

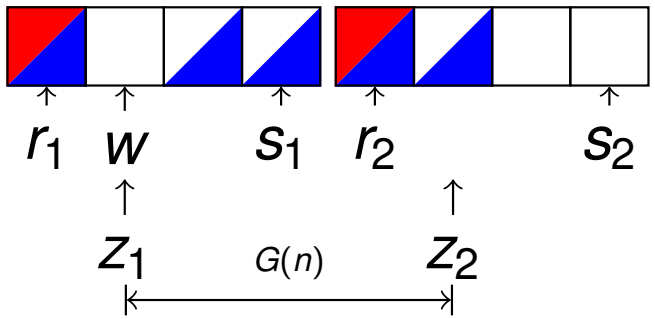
$$\Longrightarrow\ \exists w : \Big[r_1 \le w \le s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \le s_1 \implies z \in J)$$

$$\wedge \forall z_1, z_2 : \Big((r_1 \le z_1 \le s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge Succ(t, z2)))$$

$$\Longrightarrow\ ((z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J))$$

$$\vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J)) \Big) \Big]$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$

$$\wedge \mathit{Int}(r_1, s_1, Y) \wedge \mathit{Int}(r_2, s_2, Y) \wedge \mathit{Succ}(s_1, r_2) \Big)$$

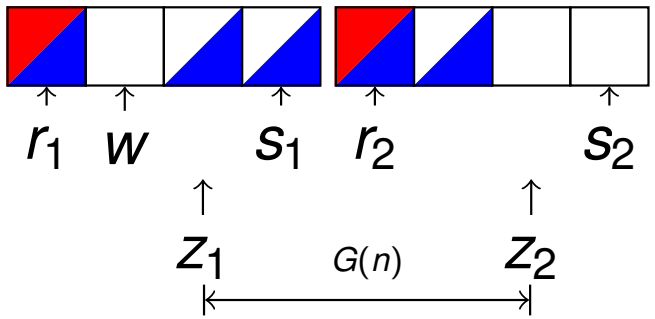
$$\Longrightarrow \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J)$$

$$\wedge \forall z_1, z_2 : \Big((r_1 \leq z_1 \leq s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge \mathit{Succ}(t, z2)))$$

$$\Longrightarrow ((z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J))$$

$$\vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J)) \Big) \Big]$$

po sobě jdoucí intervaly kódují přičtení 1



$$\forall r_1, s_1, r_2, s_2 : \Big(x \leq r_1, s_1, r_2, s_2 \leq y$$

$$\wedge \mathit{Int}(r_1, s_1, Y) \wedge \mathit{Int}(r_2, s_2, Y) \wedge \mathit{Succ}(s_1, r_2) \Big)$$

$$\Longrightarrow \exists w : \Big[r_1 \leq w \leq s_1 \wedge w \notin J \wedge (\forall z : w < z \leq s_1 \implies z \in J)$$

$$\wedge \forall z_1, z_2 : \Big((r_1 \leq z_1 \leq s_1 \wedge \exists t : (\theta_n(z_1, t) \wedge \mathit{Succ}(t, z2)))$$

$$\Longrightarrow ((z_1 < w \wedge (z_1 \in J \iff z_2 \in J))$$

$$\vee (z_1 = w \wedge z_2 \in J) \vee (z_1 > w \wedge z_2 \notin J)) \Big) \Big]$$

Poznámky k důkazu

$$\theta_{n+1}(x,y) := \exists Y : \; Y \text{ zadává intervaly na } \{x,\ldots,y\}$$
$$\wedge \text{ tyto intervaly jsou délky } G(n) \; (\ldots \theta_n \ldots)$$
$$\wedge \text{ intervalů je } 2^{G(n)} \; (\ldots \theta_n \implies \ldots)$$

- velikost formule exponenciální v n
- vnořená negace $((\theta_n \implies \alpha) \equiv (\neg\theta_n \vee \alpha))$

Přehled složitostí

nedeterministické KA		MSO	
$L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \emptyset$	NLOG-úplné	$L(\phi) \stackrel{?}{=} \emptyset$	
$L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$	PSPACE-úplné	$L(\phi) \stackrel{?}{=} \Sigma^*$	non-elementary
$L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} L(\mathcal{B})$	PSPACE-úplné	$L(\phi) \stackrel{?}{=} L(\psi)$	
$L(\mathcal{A}) \stackrel{?}{\subseteq} L(\mathcal{B})$	PSPACE-úplné	$L(\phi) \stackrel{?}{\subseteq} L(\psi)$	

Osnova

Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho *, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho *, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

Věta (McNaughton-Pappert)

Jazyk L je star-free právě když je FO definovatelný.

Podtřídy regulárních jazyků

Jazyky definované logikou prvního řádu (FO) tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace.

Jazyky definované regulárními výrazy bez Kleeneho *, ale s komplementem, tvoří podtřídu MSO jazyků uzavřenou na Booleovské operace, star-free jazyky.

Věta (McNaughton-Pappert)

Jazyk L je star-free právě když je FO definovatelný.

Věta (Schützenberger)

Jazyk L je star-free právě když jeho syntaktický monoid neobsahuje podgrupu velikosti ≥ 2.

Syntaktický monoid – definice přes Google

Monoid podle Google Image search:

Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$$

Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$$

Monoid $\mathcal{M}_L$ pro L:

- prvky = $\Sigma^* / \equiv_L$
- operace: $[u]_{\equiv_L} \cdot [v]_{\equiv_L} = [u \cdot v]_{\equiv_L}$
- neutrální prvek: $[\varepsilon]_{\equiv_L}$

Syntaktický monoid – definice pro matematiky

Syntaktická ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall p, q : p \cdot u \cdot q \in L \iff p \cdot v \cdot q \in L$$

Monoid $\mathcal{M}_L$ pro L:

- prvky = $\Sigma^* / \equiv_L$
- operace: $[u]_{\equiv_L} \cdot [v]_{\equiv_L} = [u \cdot v]_{\equiv_L}$
- neutrální prvek: $[\varepsilon]_{\equiv_L}$

$\mathcal{M}_L$ je konečný, právě když L je regulární.

Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro L:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro L:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

$\mathcal{A}_L$ je deterministický automat, a je konečný, právě když L je regulární (pak je $\mathcal{A}_L$ minimální).

Syntaktický monoid – definice přes sousední balkon

Prefixová ekvivalence pro jazyk $L \subseteq \Sigma^*$:

$u \approx_L v \overset{\text{def}}{\iff} \forall w : u \cdot w \in L \iff v \cdot w \in L$

Automat $\mathcal{A}_L$ pro L:

- stavy: $Q := \Sigma^* / \approx_L$
- přechody: $[u]_{\approx_L} \xrightarrow{a} [u \cdot a]_{\approx_L}$
- iniciální stav: $[\varepsilon]_{\approx_L}$
- koncové stavy: $[u]_{\approx_L}, u \in L$

$\mathcal{A}_L$ je deterministický automat, a je konečný, právě když L je regulární (pak je $\mathcal{A}_L$ minimální).

$\mathcal{M}_L \cong T(\mathcal{A}_L)$, což je transformační monoid $\mathcal{A}_L$

- prvky: z $Q \to Q$, tvaru f_w, kde $f_w(q) = r$ tak, že $q \xrightarrow{w} r$
- operace: $f_v \circ f_u = f_{u \cdot v}$
- neutrální prvek: f_ε

Cvičení

Najděte MSO formuli pro $L((aa)^*)$.
Popište jeho syntaktický monoid.
Rozhodněte, zda je tento jazyk definovatelný v FO.

Cvičení

Najděte MSO formuli pro $L((ab)^*)$.
Popište jeho syntaktický monoid.
Rozhodněte, zda je tento jazyk definovatelný v FO.

Poznámka

Logika nabízí ještě jemnější klasifikaci:
hloubka alternací FO kvantifikátorů odpovídá
hloubce alternací booleovských operací a řetězení v
regulárních výrazech (s negací a bez $*$).

Viz: W. Thomas, Classifying regular events in symbolic logic, J. Comput. System Sci., 1982

wS1S

Změníme trochu uvažovanou logiku:

Syntax: místo relace $<$ (následník) máme relaci *Succ* (bezprostřední následník).

Sémantika:

- vyhodnocování nad $\mathbb{N}$ místo nad konečnými slovy
- kvantifikace jen přes konečné množiny

wS1S

Změníme trochu uvažovanou logiku:

Syntax: místo relace $<$ (následník) máme relaci *Succ* (bezprostřední následník).

Sémantika:

- vyhodnocování nad $\mathbb{N}$ místo nad konečnými slovy
- kvantifikace jen přes konečné množiny

wS1S (Weak Second-order + 1 Successor)

=

množina všech sentencí pravdivých na $(\mathbb{N}, +1)$

Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo x tak, že každé číslo jiné než x má předchůdce.

Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo x tak, že každé číslo jiné než x má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo x tak, že každé číslo jiné než x má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X)$
  $\notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo x tak, že každé číslo jiné než x má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X)$ $\notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

Cvičení

Zadefinujte $<$ pomocí *Succ*.

Příklady

- $\exists x : \forall y : \exists z : y = x \vee Succ(z, y) \in$ wS1S
  Existuje číslo x tak, že každé číslo jiné než x má předchůdce.
- $\exists X : \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \implies y \in X \in$ wS1S
  Existuje nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.
- $\exists X : ((\exists x : x \in X) \wedge \forall x, y : (x \in X \wedge Succ(x, y)) \Rightarrow y \in X)$
  $\notin$ wS1S
  Existuje neprázdná nahoru uzavřená *konečná* podmnožina $\mathbb{N}$.

Cvičení

Zadefinujte $<$ pomocí *Succ*.

- $\forall X : \exists t : \forall x : x \in X \implies x < t \in$ wS1S
  Každá (*konečná*) množina je konečná. :-)

Rozhodnutelnost wS1S

Věta (Büchi)

Lze rozhodnout, zda $\phi \in$ wS1S.

Rozhodnutelnost wS1S

Věta (Büchi)

Lze rozhodnout, zda $\phi \in$ wS1S.

Důkaz:

1. nahradíme *Succ* ekvivalentní definicí pomocí $<$
   + protože nepotřebujeme predikáty P_a, máme $|\Sigma| = 1$
2. uvědomíme si, že pro všechny formule $\psi(X_1, \ldots, X_k)$ a valuace ν přiřazující jen konečné množiny:
   $\exists w_\nu \in (\Sigma \times \{0,1\}^k)^* : w_\nu \in L(\mathcal{A}_\psi)$
   právě když
   $\mathbb{N}, \nu \models \psi(X_1, \ldots, X_k)$
3. otestujeme $\varepsilon \in L(\mathcal{A}_\phi)$

Presburgerova aritmetika – $(\mathbb{N}, +)$

Jak rozhodovat následující problém?

Vstup: prvořádová formule ϕ se sčítáním
Výstup: Platí ϕ na $(\mathbb{N}, +)$?

Presburgerova aritmetika – $(\mathbb{N}, +)$

Jak rozhodovat následující problém?

Vstup: prvořádová formule ϕ se sčítáním
Výstup: Platí ϕ na $(\mathbb{N}, +)$?

Redukcí na wS1S.

- Čísla z P.A. však kódujeme množinami čísel – jejich binárními zápisy.
- Příklady: $6 \mapsto \{2, 3\}$, $11 \mapsto \{1, 2, 4\}$.
- Binární sčítání pak lze vyjádřit v MSO.

Poznámky

- Rozhodování wS1S je non-elementary.
- Pressburgerova aritmetika je v 3EXPTIME.

Poznámky

- Rozhodování wS1S je non-elementary.
- Pressburgerova aritmetika je v 3EXPTIME.
- $(\mathbb{N}, .)$ (Skolemova a.) je rozhodnutelná, ale $(\mathbb{N}, ., +1)$, $(\mathbb{N}, ., <)$, $(\mathbb{N}, ., +)$ (Peanova a.) už jsou nerozhodnutelné (a ve skutečnosti ekvivalentní)
  viz např. [A. Bes: A Survey of Arithmetical Definability, 2002]

Osnova

Konečná slova

$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n = \bigcup_{n \geq 0} (\{1, \ldots, n\} \to \Sigma)$

$abc, \varepsilon, abbbaaababba \ldots$

Nekonečná slova

$\Sigma^\omega = \mathbb{N} \to \Sigma$

$abababbbabaaababbabaabbababbabababbaabbababaabbabbabb \ldots$

Konečná slova

Definice regulárních jazyků:

- nedeterministickými KA
- deterministickými KA
- regulárními výrazy
- algebraicky
- logikou MSO

Nekonečná slova

Definice ω-regulárních jazyků:

- nedet. KA více druhů
- deterministické ne vždy
- ω-regulární výrazy
- algeb. popis složitější
- logika MSO funguje

Konečná slova	Nekonečná slova
Definice regulárních jazyků:	Definice ω-regulárních jazyků:
• nedeterministickými KA	• nedet. KA více druhů
• deterministickými KA	• deterministické ne vždy
• regulárními výrazy	• ω-regulární výrazy
• algebraicky	• algeb. popis složitější
• logikou MSO	• logika MSO funguje

Cvičení

- Je každý $L \subseteq \Sigma^*$, $|L| = 1$ regulární?
- Je každý $L \subseteq \Sigma^\omega$, $|L| = 1$ ω-regulární?
- Kolik je jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a\}$?
- Kolik je ω-jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a\}$?

Automaty

Automaty – jako u konečných slov

nedeterministický KA $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, \text{Akc})$
čte vstupní slovo písmeno po písmenu
(akorát to hrozně dlouho trvá :-))

Akceptační podmínky – odlišné

$Inf(\rho)$ = právě ty stavy, které běh ρ navštíví ∞-krát

Büchi Akc $= F \subseteq Q$,
cíl: $Inf(\rho) \cap F \neq \emptyset$

Muller Akc $= \mathcal{F} \subseteq 2^Q$,
cíl: $Inf(\rho) \in \mathcal{F}$

Rabin Akc $= \mathcal{T} \subseteq 2^Q \times 2^Q$,
cíl: $\exists (N, K) \in \mathcal{T} : N \cap Inf(\rho) \neq \emptyset \wedge K \cap Inf(\rho) = \emptyset$

ω-regulární jazyky

Jazyky akceptované

- nedeterministickými Büchiho automaty (BA)
- (ne)deterministickými Mullerovy automaty
- (ne)deterministickými Rabinovy automaty

ω-regulární jazyky

Jazyky akceptované

- nedeterministickými Büchiho automaty (BA)
- (ne)deterministickými Mullerovy automaty
- (ne)deterministickými Rabinovy automaty

Uzavřeny na $\cup$, $\cap$. Důkaz stejný jako pro konečná slova.

ω-regulární jazyky

Jazyky akceptované

- nedeterministickými Büchiho automaty (BA)
- (ne)deterministickými Mullerovy automaty
- (ne)deterministickými Rabinovy automaty

Uzavřeny na $\cup$, $\cap$. Důkaz stejný jako pro konečná slova.

Uzavřeny na doplněk. Ovšem...

Konečná slova: NKA $\rightarrow$ DKA $\rightarrow \overline{\text{DKA}}$.
ω-slova: NBA $\not\rightarrow$ DBA $\not\rightarrow \overline{\text{DBA}}$.

Jazyky akceptované determ. BA nejsou uzavřeny na doplněk, proto det. BA nepopisují celou třídu ω-reg. jazyků.

Logika

Dvě varianty MSO:

- MSO
- wMSO: „weak” kvantifikace – jen přes konečné množiny

Logika

Dvě varianty MSO:

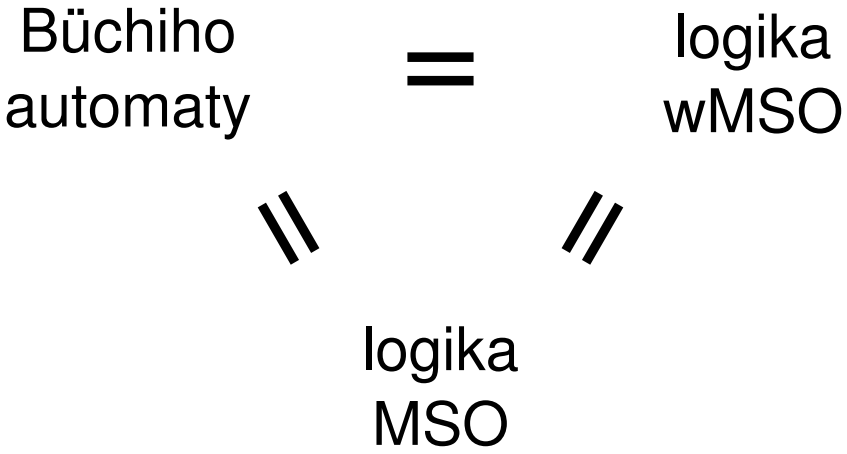
- MSO
- wMSO: „weak” kvantifikace – jen přes konečné množiny

Hloupá otázka

Která z výše uvedených je „MSO tak, jak ji známe”?

Osnova

Automaty = (w)MSO



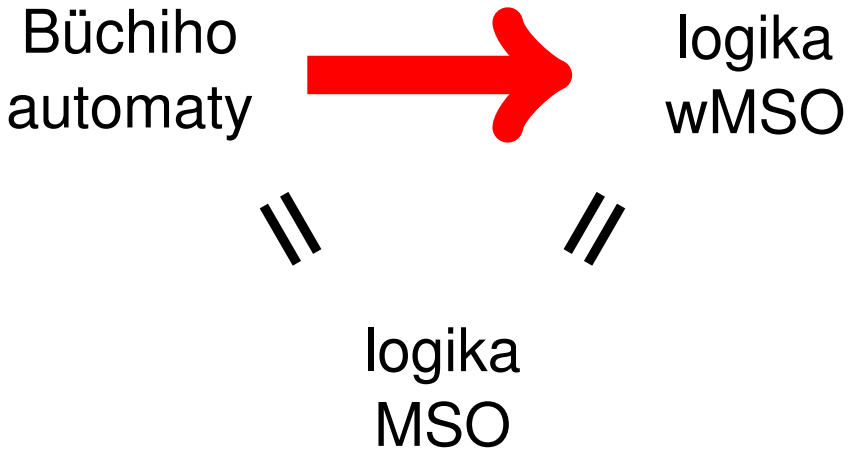
Věta

ω-regulární jazyky = jazyky definovatelné wMSO.

Věta (Büchi)

ω-regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO

Automaty = (w)MSO



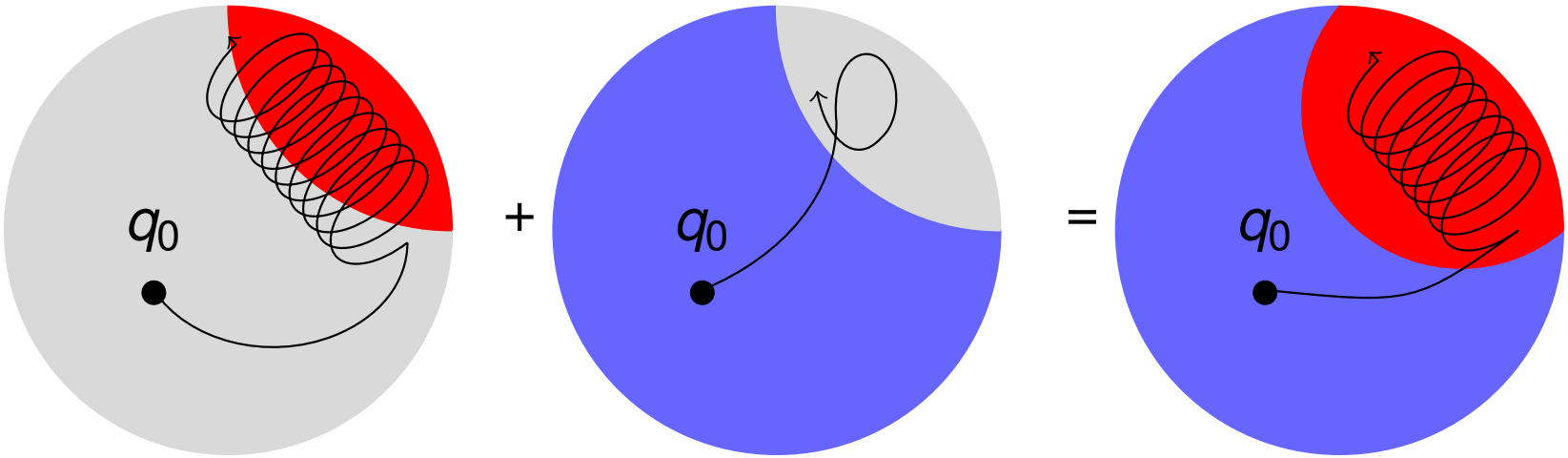
Věta

ω-regulární jazyky = jazyky definovatelné wMSO.

Věta (Büchi)

ω-regulární jazyky = jazyky definovatelné MSO

Büchi → Muller → wMSO



Büchi: ∞ vše v ■ co-Büchi: ■ $< \infty$ Muller

Pro každý determ. Mullerův $\mathcal{A}$
existují determ. Büchiho $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_n$ tak, že:

$$L(\mathcal{A}) = (L(\mathcal{B}_1) \cap co\text{–}L(\mathcal{B}'_1)) \cup \cdots \cup (L(\mathcal{B}_n) \cap co\text{–}L(\mathcal{B}'_n))$$

Büchi → Muller → wMSO

Věta (McNaughton)

Deterministické Mullerovy automaty a nedeterministické Büchiho automaty akceptují stejnou třídu jazyků.

Důsledek

L je ω-regulární, právě když
existují determ. Büchiho $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_n$ tak, že:

$$L = (L(\mathcal{B}_1) \cap co\text{-}L(\mathcal{B}'_1)) \cup \cdots \cup (L(\mathcal{B}_n) \cap co\text{-}L(\mathcal{B}'_n))$$

Büchi → Muller → wMSO

Věta (McNaughton)

Deterministické Mullerovy automaty a nedeterministické Büchiho automaty akceptují stejnou třídu jazyků.

Důsledek

L je ω-regulární, právě když
existují determ. Büchiho $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_n$ tak, že:

$$L = (L(\mathcal{B}_1) \cap co\text{-}L(\mathcal{B}'_1)) \cup \cdots \cup (L(\mathcal{B}_n) \cap co\text{-}L(\mathcal{B}'_n))$$

Důsledek

ω-regulární jazyky jsou uzavřeny na doplněk.

detBA $\longrightarrow$ wMSO

Protože wMSO je uzavřená na $\wedge$, $\vee$ a $\neg$, stačí dokázat:

Pro každý determ. Büchiho $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$
existuje sentence wMSO ϕ *tak, že* $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

Pro každé $w \in \Sigma^\omega$ platí:

$$w \in L(\mathcal{A})$$
$$\Longleftrightarrow$$
Existuje běh ρ nad w, tak, že $\rho(n) \in F$ pro ∞ mnoho n.

detBA $\longrightarrow$ wMSO

Protože wMSO je uzavřená na $\wedge$, $\vee$ a $\neg$, stačí dokázat:

Pro každý determ. Büchiho $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$
existuje sentence wMSO ϕ tak, že $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

Pro každé $w \in \Sigma^\omega$ platí:

$$w \in L(\mathcal{A})$$
$$\Longleftrightarrow$$
Existuje běh ρ nad w, tak, že $\rho(n) \in F$ pro ∞ mnoho n.
$$\Longleftrightarrow$$
Existuje jediný běh ρ nad w, a splňuje $\rho(n) \in F$ pro ∞ mnoho n.

detBA $\longrightarrow$ wMSO

Protože wMSO je uzavřená na $\wedge$, $\vee$ a $\neg$, stačí dokázat:

Pro každý determ. Büchiho $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$
existuje sentence wMSO ϕ *tak, že* $L(\mathcal{A}) = L(\phi)$.

Pro každé $w \in \Sigma^\omega$ platí:

$$w \in L(\mathcal{A})$$
$$\Longleftrightarrow$$
Existuje běh ρ nad w, tak, že $\rho(n) \in F$ pro ∞ mnoho n.
$$\Longleftrightarrow$$
Existuje jediný běh ρ nad w, a splňuje $\rho(n) \in F$ pro ∞ mnoho n.
$$\Longleftrightarrow$$
Jako KA, $\mathcal{A}$ akceptuje $w(1) \cdots w(n)$ pro ∞ mnoho n.

detBA $\longrightarrow$ wMSO

1. Nad *konečnými* slovy je $\mathcal{A}$ ekvivalentní formuli MSO: $\phi = \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \phi'$.

detBA $\longrightarrow$ wMSO

1. Nad *konečnými* slovy je $\mathcal{A}$ ekvivalentní formuli MSO: $\phi = \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \phi'$.
2. Je-li $w \in \Sigma^\omega$, pak $\mathcal{A}$ akceptuje $w(1)\cdots w(n) \in \Sigma^*$, právě když $w, \nu \models \tau(x)$ pro valuaci $\nu(x) = n$ a formuli

$$\tau(x) := \exists\{X_q \mid q \in Q\} :$$
$$(\phi' \wedge \bigvee_{q\in F} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q\in Q} \forall y : (y \in X_q \implies y < x))$$

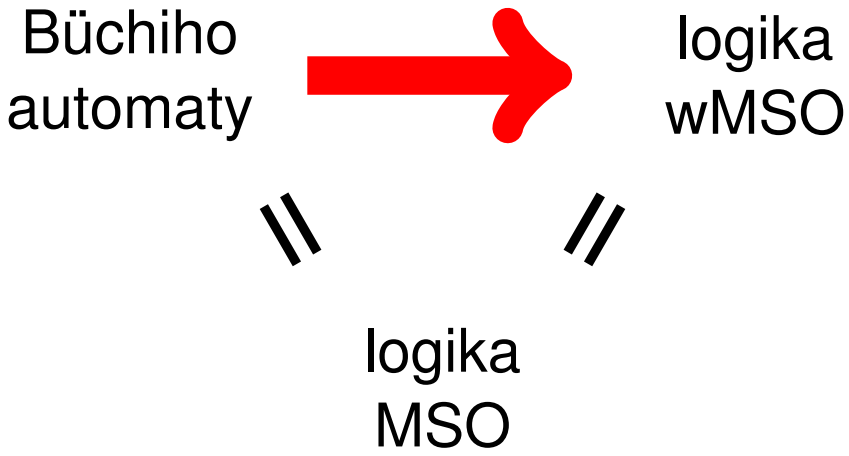
detBA $\longrightarrow$ wMSO

1. Nad *konečnými* slovy je $\mathcal{A}$ ekvivalentní formuli MSO: $\phi = \exists\{X_q \mid q \in Q\} : \phi'$.
2. Je-li $w \in \Sigma^\omega$, pak $\mathcal{A}$ akceptuje $w(1)\cdots w(n) \in \Sigma^*$, právě když $w, \nu \models \tau(x)$ pro valuaci $\nu(x) = n$ a formuli

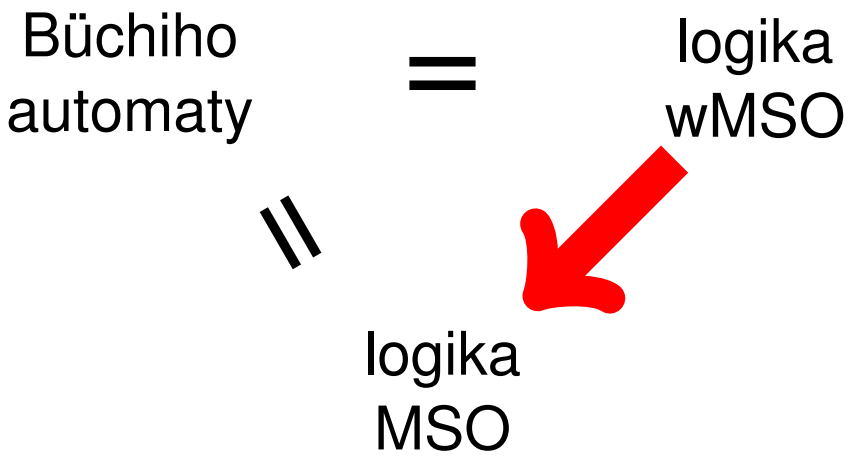
$$\tau(x) := \exists\{X_q \mid q \in Q\} :$$
$$(\phi' \wedge \bigvee_{q\in F} x \in X_q \wedge \bigwedge_{q\in Q} \forall y : (y \in X_q \implies y < x))$$

3. V MSO i ve wMSO platí: $w \models \forall x : \exists y : (y > x \wedge \tau(y))$, právě když $\mathcal{A}$ akceptuje $w(1)\cdots w(n)$ pro ∞ mnoho n.

Automaty = (w)MSO



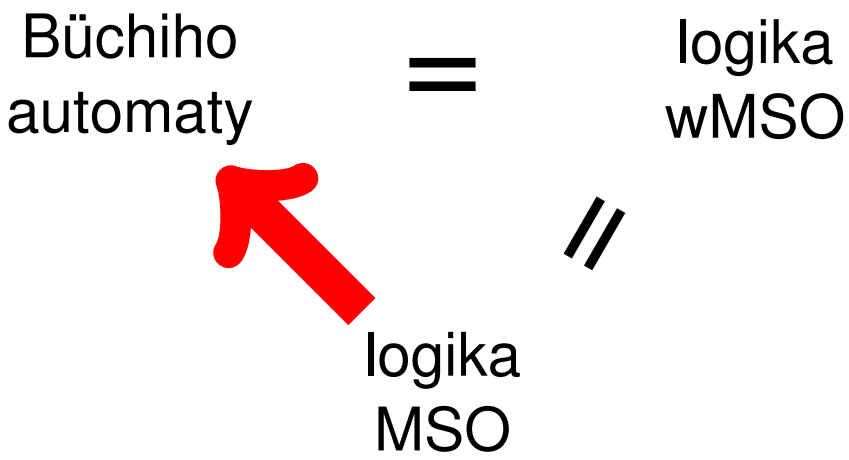
Automaty = (w)MSO



Cvičení

Pro formuli wMSO ϕ najděte formuli MSO ψ tak, že $L(\phi) = L(\psi)$.
Najděte příklad, kdy nelze vzít $\phi = \psi$.

Automaty = (w)MSO



Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Chceme zkonstruovat pro každou

formuli čisté MSO $\phi(X, \ldots)$

Büchiho automat $\mathcal{A}$

tak, že $L(\phi(X, \ldots)) = L(\mathcal{A})$, indukcí ke struktuře ϕ.

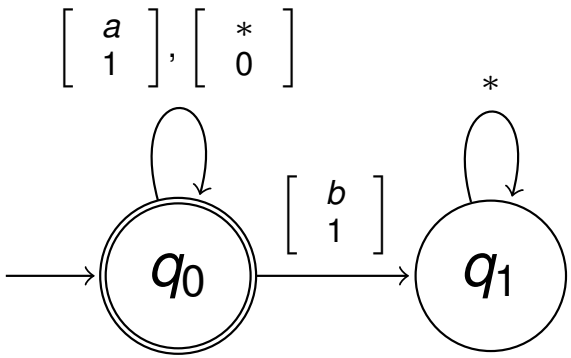
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.

Bázové kroky:

$P_a(X_1)$



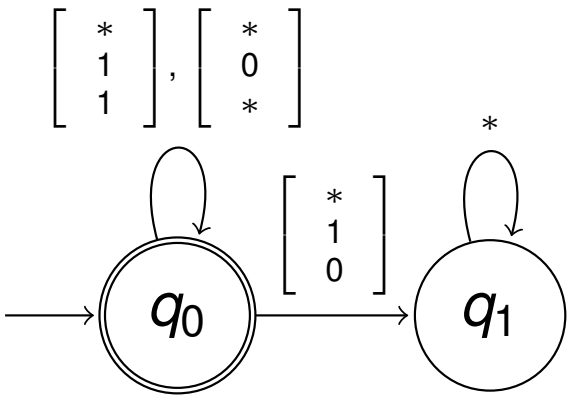
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.

Bázové kroky:

$X_1 \subseteq X_2$



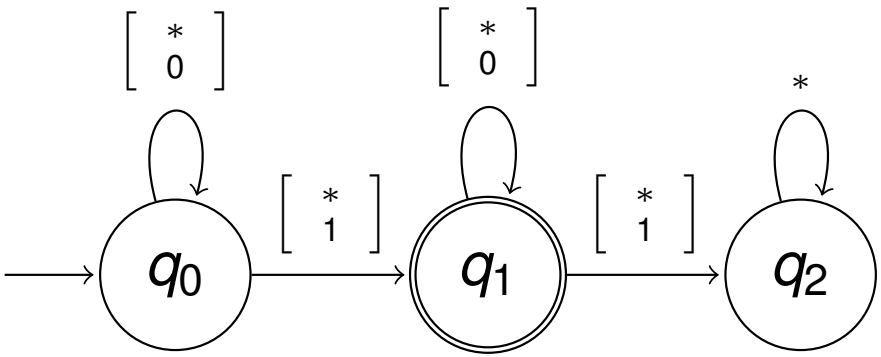
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.

Bázové kroky:

$Sng(X_1)$



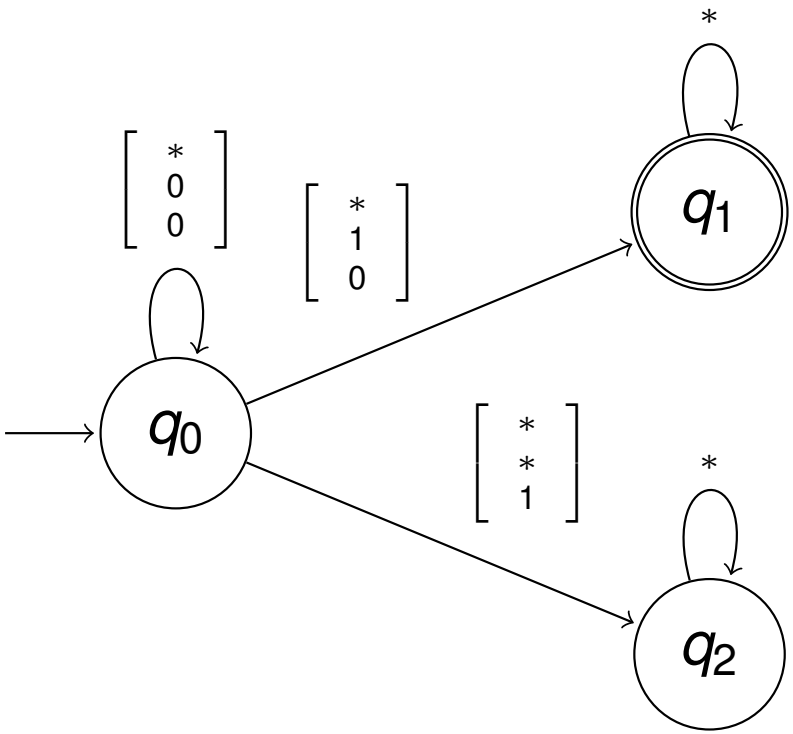
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.

Bázové kroky:

$X_1 < X_2$



Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \stackrel{\cdot}{\longrightarrow}, F)$.

Logické operace $\vee, \wedge, \neg$ přejdou na $\cup$, $\cap$ a komplement.

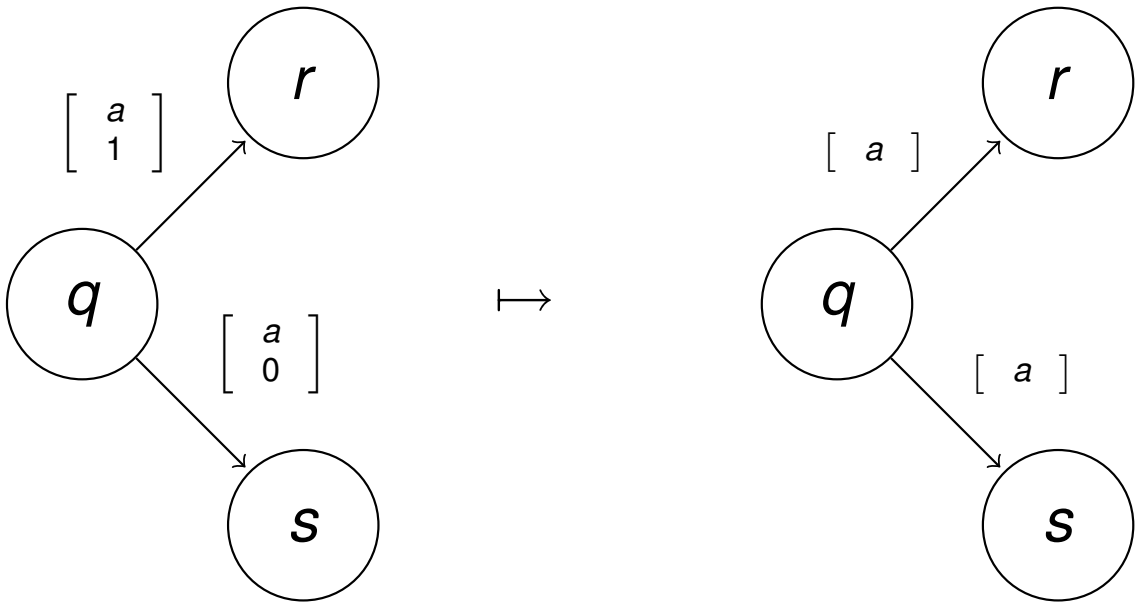
Formule čisté MSO $\longrightarrow$ automat

Stejné jako u konečných slov.

Formule = $\phi(X_1, \ldots, X_k)$, automat = $\mathcal{A} = (Q, q_0, \dot{\longrightarrow}, F)$.

Kvantifikace:

$\exists X_1 : \phi(X_1)$



Osnova

wS1S = S1S

Snadný důsledek toho, že MSO je ekvivalentní wMSO na nekonečných slovech, zejména nad $\Sigma = \{a\}$.

Linear Temporal Logic

Další logika schopná popsat vlastnosti slov:

- $P(a)$ – první písmeno je a
- $\vee, \wedge, \neg$
- $X\phi$ – ϕ platí od druhého písmena
- $\phi U \psi$ – od nějakého písmena platí ψ, a do té doby ϕ

Linear Temporal Logic

Další logika schopná popsat vlastnosti slov:

- $P(a)$ – první písmeno je a
- $\vee, \wedge, \neg$
- $X\phi$ – ϕ platí od druhého písmena
- $\phi U \psi$ – od nějakého písmena platí ψ, a do té doby ϕ

Cvičení

Popište

- $trueU(\neg(trueU\neg P(a)))$ pomocí BA
- $(a^*b)^\omega$ pomocí LTL
- $((aa)^*b)^\omega$ pomocí deterministického BA

FO = LTL

Věta (Kamp; Gabbay, Pnueli, Shelah and Stavi)

Jazyky popsatelné LTL jsou přesně jazyky popsatelné FO.

FO = LTL

Věta (Kamp; Gabbay, Pnueli, Shelah and Stavi)

Jazyky popsatelné LTL jsou přesně jazyky popsatelné FO.

Překvapující, neboť LTL je výrazově mnohem chudší.
Platí se složitostí – splnitelnost je PSPACE-úplná pro LTL, ale non-elementary pro FO.

FO = LTL

Věta (Kamp; Gabbay, Pnueli, Shelah and Stavi)

Jazyky popsatelné LTL jsou přesně jazyky popsatelné FO.

Překvapující, neboť LTL je výrazově mnohem chudší.
Platí se složitostí – splnitelnost je PSPACE-úplná pro LTL, ale non-elementary pro FO.

Cvičení

Nechť $\mathcal{L}_{DBA}$ jsou jazyky akceptované determ. BA, a $\mathcal{L}_{LTL}$ jazyky popsatelné LTL. Dokažte:

- $\mathcal{L}_{LTL} \not\subseteq \mathcal{L}_{DBA}$
- $\mathcal{L}_{DBA} \not\subseteq \mathcal{L}_{LTL}$

FO = star-free

L je ω-regulární, právě když je tvaru

$$L = K_1 \cdot L_1^\omega \cup \cdots \cup K_n \cdot L_n^\omega$$

pro $K_i,\ L_i$ regulární.

FO = star-free

L je ω-regulární, právě když je tvaru

$$L = K_1 \cdot L_1^\omega \cup \cdots \cup K_n \cdot L_n^\omega$$

pro $K_i,\ L_i$ regulární.

Podobně L je definovatelný v FO, právě když je tvaru

$$L = K_1 \cdot L_1^\omega \cup \cdots \cup K_n \cdot L_n^\omega$$

pro $K_i,\ L_i$ star-free.

Další směry

Automaty pro slova už známe. . .

Další směry

Automaty pro slova už známe. . .

. . . přišel čas na automaty pro stromy: