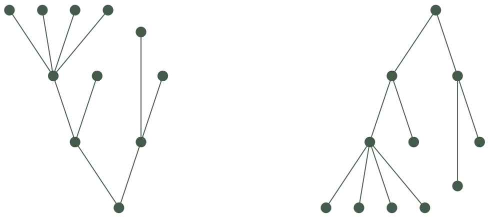
10 Stromy a kostry grafů

Na rozdíl od předchozí lekce, která se zabývala grafy z obecného a také trochu povrchního pohledu, se nyní soustředíme na jednu konkrétní nepříliš obtížnou oblast, které se budeme věnovat do větší hloubky. Jde o problematiku stromů, neboli acyklických souvislých grafů, představujících nejjednodušší podobu grafů.

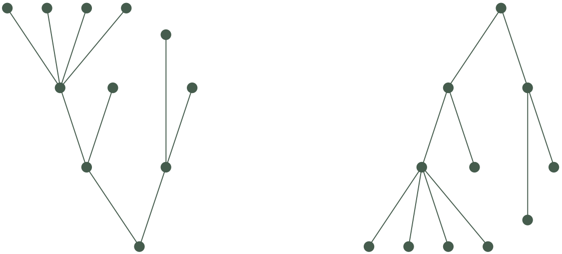


Stručný přehled lekce

* Stromy a jejich vlastnosti s důkazy.
* Minimální kostra grafu a její základní algoritmy.
* Dodatek: systémy různých reprezentantů.

10.1 Stromy – grafy bez kružnic

Začněme ilustračními obrázky stromů. Povšimněte si přitom jedné zvláštnosti, totiž že v informatice stromy typicky rostou „shora dolů“...



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost. □

Definice 10.1. **Strom** je (jednoduchý) souvislý graf T bez kružnic.

□

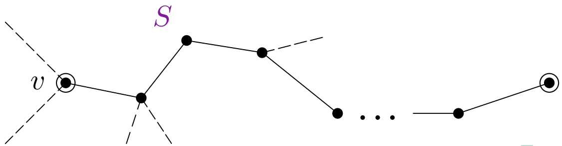
Obecněji *les* je pak graf bez kružnic (jednoduchý, nemusí být souvislý). Komponenty souvislosti lesa jsou stromy. Jeden vrchol bez hran a prázdný graf jsou také stromy. Grafy bez kružnic také obecně nazýváme *acyklické*.

Vlastnosti stromů

Tvrzení 10.2. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1. □

Důkaz: Vezmeme libovolný strom T a v něm libovolný vrchol v. Jelikož souvislý graf s více než jedním vrcholem nemá vrchol stupně 0, vrch. v má incidentní hranu. □Zvolme (sestrojme) nyní nejdelší možnou cestu S v T začínající ve v:

- S začne libovolnou hranou vycházející z v; □
- v každém dalším vrcholu u cesty S, který má stupeň větší než 1, pokračuje S další hranou. □
  Pokud by tomu tak nebylo, není S nejdelší možná nebo další hrana vede do některého předchozího vrcholu cesty S. Tím bychom ale získali kružnici.



□

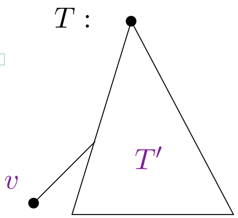
Proto cesta S nutně skončí v nějakém vrcholu stupně 1 v T. □

Definice: Každý jeho vrchol stromu stupně 1 nazveme *listem* stromu.

Počet hran stromu

Věta 10.3. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.* □

Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n.



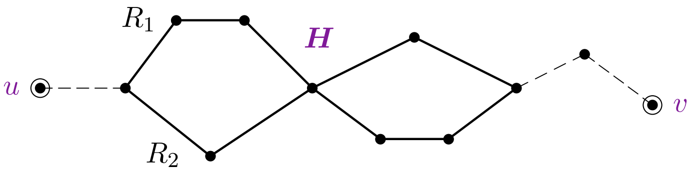
* Strom s jedním vrcholem má přesně $0 = n-1$ hran. □

* Předpokládejme platnost tvrzení pro libovolné přirozené $n := i \geq 1$. Nechť T je nyní libovolný strom na $n := i+1$ vrcholech. □

  Podle Tvrzení 10.2 obsahuje T vrchol v stupně 1. Označme $T' = T - v$ graf vzniklý z T odebráním vrcholu v a jedné jeho hrany. □
  Pak T' je také souvislý graf bez kružnic, a tudíž strom na $n-1 = i$ vrcholech. Dle indukčního předpokladu T' má $i-1 = n-2$ hran, a proto T má $n-2+1 = n-1$ hran. □

Cesty ve stromech

Věta 10.5. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.* □



Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta. □

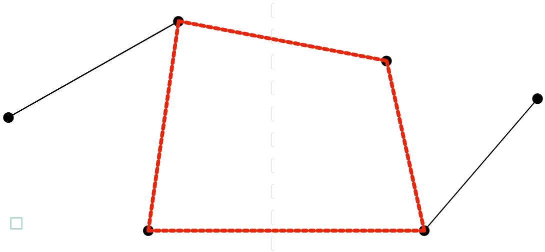
Pokud by existovaly dvě různé cesty R_1, R_2 mezi u a v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = R_1 \Delta R_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé. □Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Tvrzení 10.2, což je spor. □ □

Důsledek 10.6. *Přidáním jedné hrany do stromu vznikne právě jedna kružnice.*

Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

- minimální souvislý graf (plyne z Věty 10.5)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 10.6).

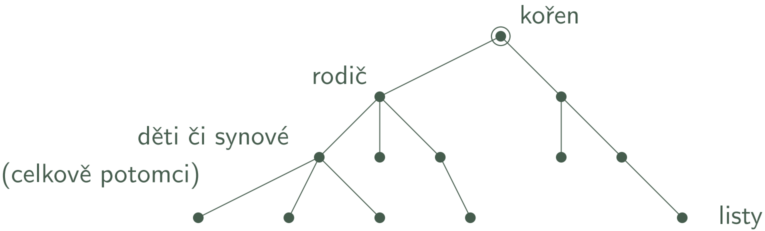


Kořenový strom

Definice: Strom T s vyznačeným vrcholem $r \in V(T)$, zkráceně dvojice (T, r), nazýváme *kořenovým stromem* s *kořenem* r. Vrchol p nazveme *potomkem* vrcholu q, pokud cesta z kořene r do p obsahuje (neboli vede přes) q.

V kořenovém stromu nazveme *listem* každý vrchol, který nemá potomky.

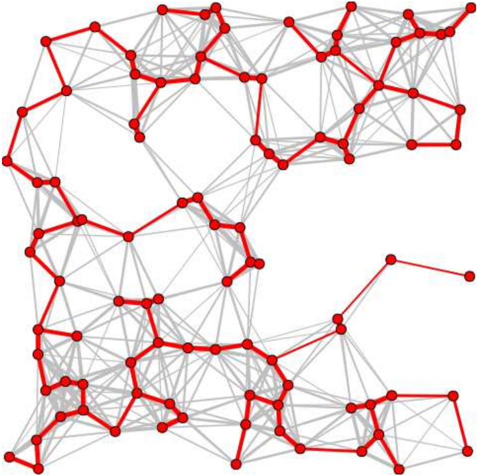
Každý vrchol kořenového stromu je potomkem kořene. V přirozeně přeneseném významu se u kořenových stromů používají pojmy rodič, děti/synové, sourozenci, předchůdce, následník, atd.



Definice: *Výška kořenového stromu* je rovna největší vzdálenosti z jeho kořene do některého listu.

10.2 Problém minimální kostry

V návaznosti na učivo o stromech se podíváme na tradiční a široce studovaný problém nalezení minimálního souvislého podgrafu (stromu) – této úloze se říká minimální kostra neboli MST (z anglického minimum spanning tree).



Minimální kostra a vážené grafy

Definice: Podgraf $T \subseteq G$ souvislého grafu G se nazývá *kostrou*, pokud

* T je stromem a
* $V(T) = V(G)$, neboli T propojuje všechny vrcholy G. □

Avšak každý strom na daných n vrcholech má stejně hran, přesně $n-1$. Jaký smysl tedy má dávat slovo „minimální" u hledané kostry?

Definice: Vážený graf je graf G spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly

$$w : E(G) \to \mathbb{R}\,. \square$$

Vahou (délkou) kostry $T \subseteq G$ váženého souvislého grafu (G, w) rozumíme

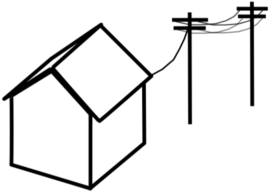
$$d_G^w(T) := \sum\nolimits_{e \in E(T)} w(e)\,. \square$$

Definice 10.7. Problém minimální kostry (MST) ve váž. grafu (G, w) hledá kostru $T \subseteq G$ s nejmenší možnou vahou (přes všechny kostry grafu G).

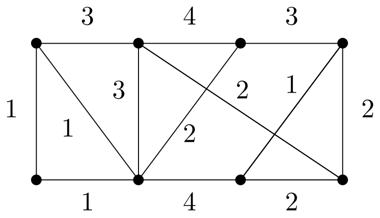
Historické ohlédnutí

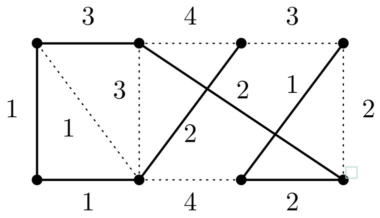
Problém minimální kostry je ve skutečnosti historicky úzce svázán s jižní Moravou a Brnem, konkrétně s elektrifikací jihomoravských vesnic ve dvacátých letech! Právě na základě tohoto praktického optimalizačního problému brněnský matematik Otakar Borůvka jako první v matematické literatuře zformuloval a podal řešení problému minimální kostry v roce 1926.

Ve výzkumu minimálních koster pokračoval i velmi dobře známý český matematik Vojtěch Jarník, s publikací v roce 1930 (viz Algoritmus 10.10). První ne-českou publikací na toto téma je pak až Kruskalův hladový algoritmus z roku 1956 (viz Algoritmus 10.8).



Řešení minimální kostry



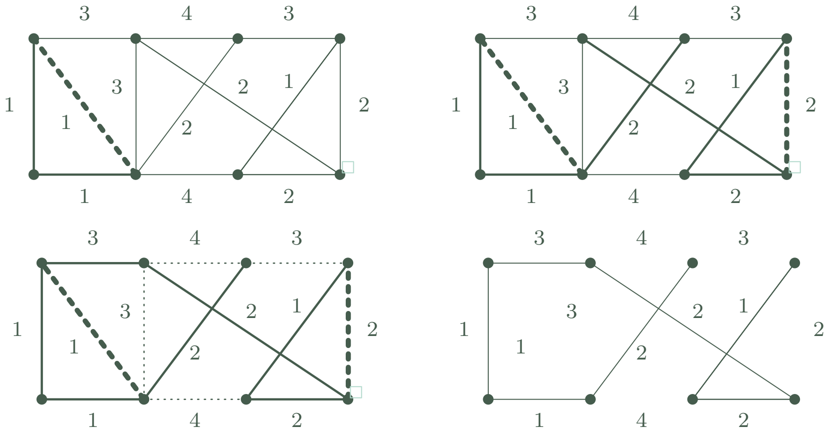


Algoritmus 10.8. Hladový postup pro minimální kostru grafu (G, w).
Mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w.

1. Seřadíme všechny hrany G jako $E(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ tak, že $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$. □
2. Inicializujeme prázdnou kostru $T = (V(G), \emptyset)$. □
3. Po řadě pro $i = 1, 2, \ldots, m$ provedeme následující:
   - Pokud $T + e_i$ nevytváří kružnici, tak $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e_i\}$.
     (Neboli pokud e_i spojuje různé komponenty souvislosti dosav. T.)□
4. Na konci T obsahuje minimální kostru grafu G.

Ukážeme si postup hladového algoritmu pro vyhledání kostry výše zakresleného grafu. Hrany si nejprve seřadíme podle jejich vah $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$.

V obrázku průběhu algoritmu používáme tlusté čáry pro vybrané hrany kostry a tečkované čáry pro „zahozené“ hrany. Hrany teď postupně přidáváme do kostry či zahazujeme...



Získáme tak minimální kostru velikosti $1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 12$, která je v tomto případě (náhodou) cestou, na posledním obrázku vpravo.

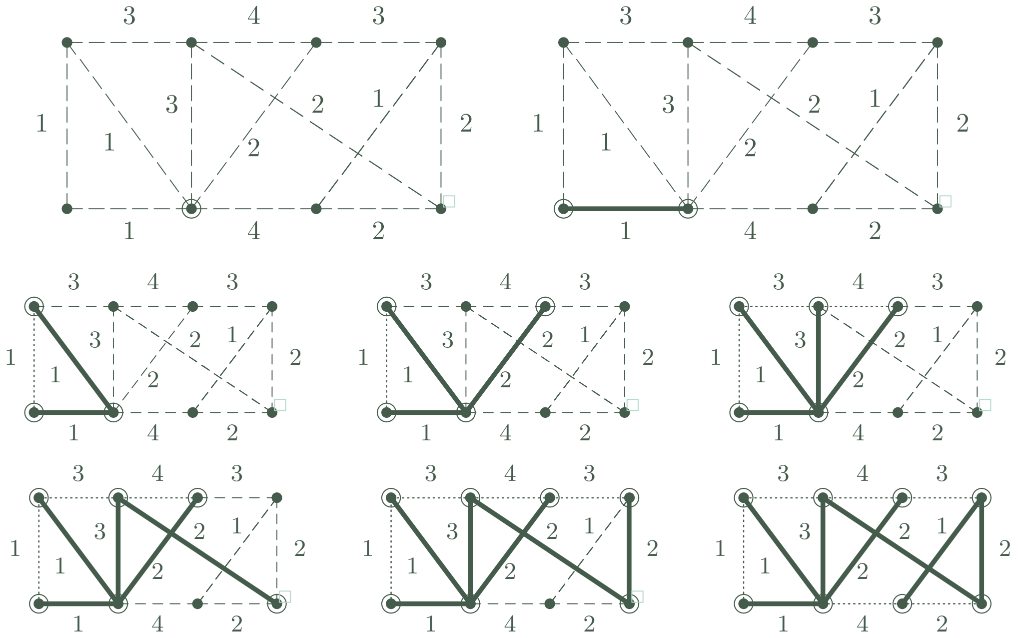
Jarníkův (Primův) algoritmus

Algoritmus 10.10. Hledání minimální kostry ve váženém grafu (G, w).
Opět mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w. □

1. Na začátku zvolíme lib. vrchol $u \in V(G)$ a podstrom $T := (\{u\}, \emptyset)$.□
2. Dokud $V(T) \neq V(G)$, provádíme:
   Nalezneme hranu $f = uv \in E(G)$ nejmenší váhy s jedním koncem u ve $V(T)$ a druhým v ve $V(G) \setminus V(T)$ a položíme $T := T + v + f$. □

   Formálně přesněji tento krok popíšeme následovně.
   * Nechť $X = \{uv \in E(G) : u \in V(T), v \in V(G) \setminus V(T)\}$ a zvolme $f = uv \in X$ minimalizující váhu $w(f)$.
   * Položme $V(T) := V(T) \cup \{v\}$ a $E(T) := E(T) \cup \{f\}$. □
3. Nyní je T minimální kostrou grafu G.

Následuje stručná ukázka průběhu Jarníkova algoritmu.



10.3 Dodatek: Výběr různých reprezentantů

S grafy je úzce svázán i tento klasický kombinatorický problém, vybírající různé reprezentanty z daného systému množin.

Definice: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takových, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. □

Věta 10.12. (Hall) *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\} : \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,, \tag{1}$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno. □

Co nám tedy Věta 10.12 prakticky říká?

- Pokud systém různých reprezentantů existuje, stačí jej najít či uhodnout.
- A pokud neexistuje, stačí nalézt vhodnou množinu J porušující podmínku (1).

Párování grafu a reprezentanti

Přiřazení reprezentantů množinám lze chápat jako hrany grafu, ve kterém na jedné straně jsou naše množiny a na druhé straně jsou jejich všechny prvky.

Takto vypadajícím grafům říkáme *bipartitní* (formálně je bipartitní graf libovolným podgrafem vhodného úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$). □

Definice: *Párování* v (nyní bipartitním) grafu G je podmnožina hran $M \subseteq E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol. □

Uvažujme systém množin $M_1, \dots, M_k$ a označme $p_1, \dots, p_m$ všechny prvky ve sjednocení $M_1 \cup \dots \cup M_k$. Definujeme si bipartitní graf G na množině vrcholů $\{1, 2, \dots, k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, který je tvořen hranami $\{i, p_j\}$ pro všechny dvojice i, j, pro které $p_j \in M_i$. □Pak platí:

Tvrzení 10.13. *Množiny $M_1, \dots, M_k$ mají systém různých reprezentantů právě tehdy, když v grafu G existuje párování pokrývající vrcholy $\{1, 2, \dots, k\}$.*

Poznámka: Pro nalezení největšího párování v bipartitním grafu existují rychlé postupy (algoritmy), související s tzv. toky v sítích. Tyto postupy se také dají využít (podle uvedeného tvrzení) k hledání systémů různých reprezentantů.