IB107 Vyčíslitelnost a složitost

věta o parametrizaci, programovací systémy

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

věta o parametrizaci

- funkci lze definovat parametrizací, tj. zafixováním vybraných argumentů jiné funkce

Věta (věta o parametrizaci, s_n^m věta (Kleene))

Pro každá $m, n \geq 1$ *existuje totálně vyčíslitelná funkce* $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ *taková, že pro všechna* $e, y_1, \ldots, y_{m+n} \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,y_1,\ldots,y_m)}(y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) = \varphi_e^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_{m+n}).$$

důkaz věty o parametrizaci

$$\varphi^{(n)}_{s^m_n(e,y_1,\ldots,y_m)}(y_{m+1},\ldots,y_{m+n}) = \varphi^{(m+n)}_e(y_1,\ldots,y_{m+n})$$

Důkaz: funkce $s^m_n(e, y_1, \ldots, y_m)$ vrací index programu

begin
$x_{m+n} := x_n;$
$\vdots$
$x_{m+1} := x_1;$
$x_m := y_m;$
$\vdots$
$x_1 := y_1;$
P_e
end

$\blacksquare$

využití věty o parametrizaci

Lemma

Existuje totálně vyčíslitelná funkce $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *taková, že pro všechna* $i, j, x \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\varphi_{h(i,j)}(x) = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x).$$

Důkaz:

- definujme funkci $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ jako

$$f(i, j, x) = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x) = \varphi_i(\varphi_j(x)) = \Phi(i, \Phi(j, x))$$

- f je vyčíslitelná a nechť e je její index
- věta o parametrizaci říká, že existuje tot. vyčíslitelná funkce s^2_1 splňující $\varphi_{s^2_1(e,i,j)}(x) = \varphi_e(i, j, x) = f(i, j, x)$
- klademe $h(i, j) = s^2_1(e, i, j)$ a tudíž h je tot. vyčíslitelná ∎

translační lemma

Důsledek (translační lemma)

Ke každé vyčíslitené funkci $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ existuje tot. vyčíslitelná funkce $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f(x, y) = \varphi_{r(x)}(y).$$

- nazývá se také neefektivní podoba věty o parametrizaci
- lze zobecnit na vyšší počty argumentů

Důkaz:

- nechť e je index f
- věta o parametrizaci říká, že existuje tot. vyčíslitelná funkce s_1^1 splňující $\varphi_{s_1^1(e,x)}(y) = \varphi_e(x, y) = f(x, y)$
- klademe $r(x) = s_1^1(e, x)$ a tudíž r je tot. vyčíslitelná ■

využití translačního lemmatu

- nechť $\psi : \mathbb{N} \to \mathcal{S}$ je (ne nutně totální) numerace podmnožiny unárních vyčíslitelných funkcí $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, která splňuje větu o numeraci, tj. existuje vyčíslitelná funkce $\Phi_\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$\Phi_\psi(x, y) = \psi_x(y)$$

- dle translačního lemmatu pak existuje tot. vyčíslitelná funkce r splňující

$$\Phi_\psi(x, y) = \varphi_{r(x)}(y) = \psi_x(y)$$

- tedy r převádí numeraci ψ na standardní numeraci φ

programovací systém/jazyk

- while-programy nejsou jediným modelem algoritmů
- ukážeme nezávislost teorie na volbě formalismu

Definice (programovací systém/jazyk)

Programovací systém (či jazyk) pro $\mathcal{P}^{(j)}$ je dvojice $\mathcal{L}' = (T, \varphi')$, kde T je množina programů (syntaxe) a $\varphi' : T \mapsto \mathcal{P}^{(j)}$ je sémantika přiřazující každému programu j-ární vyčíslitelnou funkci.

- jazyk while-programů:
- můžeme předpokládat, že $T = \mathbb{N}$
- programovací jazyk by měl být
  - univerzální – existuje univerzální program
  - efektivní – programy lze jednoduše skládat

redukce a ekvivalence numerací

Definice (redukce a ekvivalence numerací)

Numerace ψ *množiny M se redukuje na numeraci* ψ' *množiny M′ (píšeme* $\psi \le \psi'$*), právě když existuje totálně vyčíslitelná funkce* $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *taková, že pro všechna* $i \in dom(\psi)$ *platí*

$$\psi_i = \psi'_{r(i)}.$$

Numerace ψ, ψ' *jsou ekvivalentní (píšeme* $\psi \equiv \psi'$*), právě když* $\psi \le \psi'$ *a* $\psi' \le \psi$*.*

- jsou-li ψ, ψ' dvě totální numerace množiny $\mathcal{P}^{(j)}$, pak $\psi \le \psi'$ znamená, že jazyk $(\mathbb{N}, \psi)$ lze efektivně přeložit do jazyka $(\mathbb{N}, \psi')$

vztahy numerací

Věta

Nechť pro každé $j \geq 1$ jsou $\psi^{(j)}, \psi'^{(j)}$ totální numerace množiny $\mathcal{P}^{(j)}$. Pokud ψ splňuje větu o numeraci a ψ' větu o parametrizaci, pak $\psi^{(j)} \leq \psi'^{(j)}$ pro každé $j \geq 1$.

Důkaz: pro $j = 1$

- ψ má vyčíslitelnou univerzální funkci

$$\Phi_\psi(i, x) = \psi_i(x)$$

- translační lemma pro ψ' říká, že existuje totální vyčíslitelná funkce r taková, že

$$\Phi_\psi(i, x) = \psi'_{r(i)}(x)$$

- tedy $\psi \leq \psi'$

■

vztahy ke standardní numeraci

Věta

Nechť pro každé $j \geq 1$ je $\psi^{(j)}$ totální numerací množiny $\mathcal{P}^{(j)}$ a $\varphi^{(j)}$ její standardní numerací. Pak ψ splňuje věty o numeraci a parametrizaci, právě když pro každé $j \geq 1$ platí $\psi^{(j)} \equiv \varphi^{(j)}$.

Důkaz:

$\Longrightarrow$ plyne z předchozí věty

$\Longleftarrow$ ukážeme, že ψ splňuje větu o numeraci

- pro každé $j \geq 1$ je univerzální funkce $\Phi_\psi : \mathbb{N}^{j+1} \to \mathbb{N}$ pro ψ definovaná vztahem

$$\Phi_\psi(i, x_1, \ldots, x_j) = \psi_i^{(j)}(x_1, \ldots, x_j)$$

- z $\psi^{(j)} \leq \varphi^{(j)}$ plyne existence tot. vyčíslitelné funkce $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $\psi_i^{(j)} = \varphi_{r(i)}^{(j)}$

  $\Phi_\psi(i, x_1, \ldots, x_j) =$

- tedy Φ_ψ je vyčíslitelná

vztahy ke standardní numeraci

$\Longleftarrow$ ukážeme, že ψ splňuje větu o parametrizaci

- nechť $m, n \geq 1$
- z $\psi^{(m+n)} \leq \varphi^{(m+n)}$ plyne existence tot. vyčíslitelné funkce $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $\psi_i^{(m+n)} = \varphi_{r(i)}^{(m+n)}$
- z $\varphi^{(n)} \leq \psi^{(n)}$ plyne existence tot. vyčíslitelné funkce $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $\varphi_i^{(n)} = \psi_{s(i)}^{(n)}$

$$\psi_i^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_{m+n}) \ =$$

- jelikož $g(i, y_1, \ldots, y_m) = s(s_n^m(r(i), y_1, \ldots, y_m))$ je totálně vyčíslitelná funkce, ψ splňuje větu o parametrizaci $\blacksquare$

přípustná numerace

Definice (přípustná numerace)

Totální numerace vyčíslitelných funkcí je přípustná (efektivní), pokud pro ni platí věty o numeraci a parametrizaci.

věty o numeraci a parametrizaci jsou nezávislé, tedy

- existuje numerace, pro kterou platí věta o numeraci, ale neplatí věta o parametrizaci
- existuje numerace, pro kterou neplatí věta o numeraci, ale platí věta o parametrizaci

numerace totálně vyčíslitelných funkcí

Věta

Nechť ψ *je totální numerace všech unárních tot. vyčíslitelných funkcí. Pak univerzální funkce* $\Phi_\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definovaná jako*

$$\Phi_\psi(i, x) = \psi_i(x)$$

není vyčíslitelná.

Důkaz: diagonalizací ■

Důsledek

Neexistuje přípustná totální numerace všech totálních vyčíslitelných funkcí.