

IB107 Vyčísitelnost a složitost

třída P, algoritmus C-Y-K, třída NP

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

$P = \{L \mid L \text{ je rozhodovaný nějakým deterministickým
jednopáskovým (nebo vícepáskovým) TM } \mathcal{M} \text{ s časovou složitostí } T_{\mathcal{M}}(n) \in \mathcal{O}(n^k) \text{ pro } k \in \mathbb{N}\}.$

$NP = \{L \mid L \text{ je rozhodovaný nějakým nedeterministickým
jednopáskovým (nebo vícepáskovým) TM } \mathcal{M} \text{ s časovou složitostí } T_{\mathcal{M}}(n) \in \mathcal{O}(n^k) \text{ pro } k \in \mathbb{N}\}.$

- z definic plyne $P \subseteq NP$
- otevřený problém $P \stackrel{?}{=} NP$

příslušnost problémů v P

- stačí ukázat, že problém je řešitelný v polynomiálním počtu kroků a že každý krok je proveditelný v polynomiálním čase
 - kódování/dekódování objektů O do/ze slov $\langle O \rangle$ musí být proveditelné v polynomiálním čase
 - příklad vhodného kódování: reprezentace grafu maticí sousednosti
-
- příklad nevhodného kódování: reprezentace sekvence čísel unárním zápisem čísla

Definice (problém existence cesty)

Problém existence cesty je problém rozhodnout, zda v daném orientovaném grafu G existuje cesta z s do t .

$$PATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující cestu z } s \text{ do } t \}$$

Věta

$$PATH \in P.$$

Důkaz: Postupně spočítáme uzly dosažitelné z s .

- 1 označ uzel s
- 2 dokud lze označit nový uzel opakuj: projdi všechny hrany v G a označ každý uzel, do kterého vede hrana z označeného uzlu
- 3 je-li t označeno, akceptuj; jinak zamítni

Celkem $\mathcal{O}(n)$ kroků (n je počet uzlů v G), každý lze provést v polynomiálním čase.

Věta

Třída P je uzavřená na sjednocení, průnik, komplement a zřetězení.

Důkaz: Necht $L_1, L_2 \in P$. Předpokládáme, že L_i je rozhodován jednopáskovým det. TM \mathcal{M}_i s časovou složitostí v $T_{\mathcal{M}_i}(n) \in \mathcal{O}(n^{k_i})$.

Věta

Pro každý bezkontextový jazyk L platí $L \in P$.

Důkaz:

- každý bezkontextový jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ lze popsat gramatikou v Chomského normální formě (CNF)
- pro pevně danou gramatiku G v CNF a pro slovo $w \in \Sigma^*$ lze v čase $\mathcal{O}(|w|^3)$ pomocí algoritmu **Cocke-Younger-Kasami** rozhodnout, zda $w \in L(G)$ ■

intuice k algoritmu C-Y-K

$S \rightarrow AB \mid CD \mid EF$

Platí $S \Rightarrow^* w$?

myšlenka

Pro každé neprázdné podslovo u slova w spočítáme množinu

T_u všech neterminálů, z kterých lze odvodit u .

- $u = a$

- $u = ab$

- $u = abc$

příklad

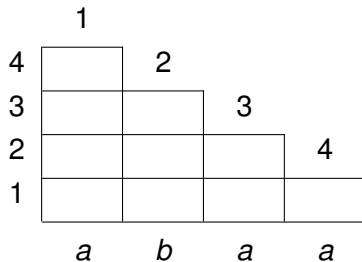
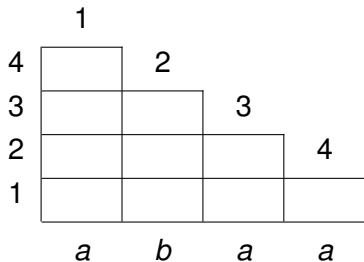
$$\begin{array}{l} S \rightarrow AB \mid SS \mid a \\ A \rightarrow AA \mid BC \mid a \\ B \rightarrow AB \mid b \\ C \rightarrow SA \mid b \end{array}$$

Platí $S \Rightarrow^* abaa$?

příklad

$S \rightarrow AB \mid SS \mid a$
 $A \rightarrow AA \mid BC \mid a$
 $B \rightarrow AB \mid b$
 $C \rightarrow SA \mid b$

$T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i w_{i+1} \dots w_{i+j-1}\}$
 $w = abaa$



algorithmus Cocke-Younger-Kasami

Vstup: gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF, slovo $w = w_1 \dots w_n \neq \varepsilon$

Výstup: množiny $T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i \dots w_{i+j-1}\}$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$T_{i,1} \leftarrow \emptyset$

for každé pravidlo tvaru $(A \rightarrow a) \in P$ **do**

if $a = w_i$ **then** $T_{i,1} \leftarrow T_{i,1} \cup \{A\}$

od

od

for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**

for $i \leftarrow 1$ **to** $n - j + 1$ **do**

$T_{i,j} \leftarrow \emptyset$

for $k \leftarrow 1$ **to** $j - 1$ **do**

for každé pravidlo tvaru $(A \rightarrow BC) \in P$ **do**

if $B \in T_{i,k} \wedge C \in T_{i+k,j-k}$ **then** $T_{i,j} \leftarrow T_{i,j} \cup \{A\}$

od

od

od

od

problém hamiltonovské cesty

hamiltonovská cesta = cesta procházející každým uzlem právě jednou

Definice (problém hamiltonovské cesty)

Problém hamiltonovské cesty je problém rozhodnout, zda v daném orientovaném grafu G existuje hamiltonovská cesta z s do t .

$$HAMPATH = \{ \langle G, s, t \rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující hamiltonovskou cestu z } s \text{ do } t \}$$

Věta

HAMPATH \in NP.

Důkaz:

- hamiltonovská cesta v grafu G s n uzly má délku $n - 1$
- hamiltonovskou cestu budeme nedeterministicky hádat
 - 1 začni budovat cestu z uzlu s
 - 2 $(n - 1)$ -krát opakuj: nedeterministicky vyber hranu vedoucí z posledního uzlu cesty a přidej ji na konec cesty
 - 3 je-li t poslední uzel cesty a žádný uzel se neopakuje, akceptuj; jinak zamítni
- každý výpočet má $\mathcal{O}(n)$ polynomiálních kroků
- hamiltonovská cesta existuje \iff existuje akceptující výpočet



problém složených čísel

Definice (problém složených čísel)

Problém složených čísel je problém rozhodnout, zda je dané číslo x složené, tedy součinem dvou čísel větších než 1.

$COMPOSITES = \{ \langle x \rangle \mid x = pq \text{ pro nějaká přirozená čísla } p, q > 1 \}$

Věta

$COMPOSITES \in NP$.

Důkaz: Nedeterministicky zvolíme číslo p takové, že $1 < p < x$. Pokud p je dělitelem x , akceptujeme, jinak zamítneme. ■

V roce 2002 bylo dokázáno, že $COMPOSITES \in P$.

problém splnitelnosti (SAT)

Definice (problém splnitelnosti (SAT))

Problém splnitelnosti (SAT) je problém rozhodnout, zda je daná výroková formule (využívající pouze operace \wedge , \vee a \neg) splnitelná.

$$SAT = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je splnitelná výroková formule} \}$$

Věta

$SAT \in NP$.

Důkaz:

“Řešení” problému lze deterministickým TM v polynomiální čase

- **nalézt**, pokud je problém v P
- **ověřit**, pokud je problém v NP (když nám řešení někdo dodá)

Definice (polynomiální verifikátor)

Polynomiální verifikátor pro jazyk L je deterministický TM \mathcal{V} splňující

$w \in L \iff$ *existuje řetězec c takový, že \mathcal{V} akceptuje $\langle w, c \rangle$*

a pracující v polynomiálním čase vzhledem k $|w|$.

- c se nazývá **svědek**, **důkaz** nebo **certifikát** příslušnosti w do L
- lze předpokládat, že velikost c je polynomiální vzhledem k $|w|$, protože polynomiální verifikátor více znaků z c nemůže přečíst

Věta

$L \in NP \iff$ *existuje polynomiální verifikátor pro L .*

Důkaz:

- \implies Nechť \mathcal{M} je nedeterministický TM akceptující L v polynomiálním čase. Verifikátor bude pro vstup $\langle w, c \rangle$ simulovat \mathcal{M} na vstupu w a c bude používat k deterministickému výběru z možných přechodů.
- \impliedby Nechť \mathcal{V} je polynomiální verifikátor pro L pracující na vstupech $\langle w, c \rangle$ v čase $\mathcal{O}(|w|^k)$. Nedeterministický stroj \mathcal{M} nedeterministicky zvolí řetězec c délky nejvýše $|w|^k$ a pak simuluje \mathcal{V} na vstupu $\langle w, c \rangle$. ■

Věta

Třída NP je uzavřená na sjednocení, průnik a zřetězení.

Důkaz:

- sjednocení a průnik: analogicky jako pro P
- zřetězení:

uzavřenost NP na doplněk

- není známo, zda je třída NP uzavřená na doplněk
- například nevíme, zda $\overline{HAMPATH} \in NP$,
- tedy nevíme, jak polynomiálně verifikovat $\overline{HAMPATH}$
- lze definovat třídu

$$\text{coNP} = \{L \mid \bar{L} \in NP\}$$

- věří se, že platí $NP \neq \text{coNP}$, tj. NP není uzavřená na doplněk
- z $NP \neq \text{coNP}$ plyne $P \neq NP$
- existují problémy, které jsou v $NP \cap \text{coNP}$, ale není známo, zda jsou v P, například problém **paritních her**