

Jméno: Brouk Pytlík

UČO: 1234567

0007

líst

1

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

2. [3 body] Uvažme funkci  $g: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou následovně:

$$g(i, j, k) = \begin{cases} \varphi_j(\varphi_i(k)) & \text{pokud } \varphi_i(k) \neq \perp, \\ \varphi_j(k+1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) (2 body) Rozhodněte a dokažte, zda je funkce  $g$  vyčíslitelná.
- b) (1 bod) Rozhodněte a dokažte, zda existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  taková, že pro všechna  $i, j, k \in \mathbb{N}$  platí

$$\varphi_{h(i,j)}(k) = g(i, j, k).$$

- a) Funkce  $g(i, j, k)$  není vyčíslitelná.

Pro důkaz sporem předpokládejme, že  $g(i, j, k)$  je vyčíslitelná. Definujeme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \varphi_x(x) \neq \perp, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce  $f(x)$  je počítaná následujícím programem a tedy vyčíslitelná. Označme její index  $e$ .

```
begin
   $\Phi(x_1, x_1)$ ;
   $x_1 := 0$ 
end
```

Pokud je funkce  $g$  vyčíslitelná, je jistě vyčíslitelná i funkce  $halt(x) = 1 - g(e, e', x)$ , kde  $e'$  je index identity (tedy  $\varphi_{e'}(x) = x$ ) a odečítání funguje jako v jazyce while-programů (nejde do záporu). Pro funkci  $halt$  platí

$$halt(x) = 1 - g(e, e', x) = \begin{cases} 1 - \varphi_{e'}(\varphi_e(x)) = 1 - f(x) & \text{pokud } \varphi_e(x) = f(x) \neq \perp, \\ 1 - \varphi_{e'}(x+1) = 1 - (x+1) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Uvedený zápis lze dále zjednodušit, jelikož

- $f(x) \neq \perp$  platí právě tehdy, když  $\varphi_x(x) \neq \perp$ . Pokud tato situace nastane, pak  $f(x) = 0$ .
- $1 - (x+1) = 0$ , neboť  $x+1 \geq 1$  a odečítání v jazyce while-programů nejde do záporu.

Celkem tedy dostáváme

$$halt(x) = \begin{cases} 1 - 0 = 1 & \text{pokud } \varphi_x(x) \neq \perp, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Funkce  $halt$  tedy rozhoduje problém zastavení a z přednášky víme, že nemůže být vyčíslitelná. Tím jsme dostali spor, přičemž jediným předpokladem bylo, že funkce  $g$  je vyčíslitelná.

Jméno: Brouk Pytlík

UČO: 1234567

0007

list

2

učo

1234567

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo listu vyplňte  
zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

b) Sporem dokážeme, že funkce  $h(i, j)$  s požadovanými vlastnostmi neexistuje.

Předpokládejme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce  $h(i, j)$  splňující  $g(i, j, k) = \varphi_{h(i, j)}(k)$ . Pak je ovšem funkce  $g(i, j, k)$  vyčíslitelná, protože ji můžeme implementovat následujícím programem, kde  $\Phi$  je univerzální funkce pro unární vyčíslitelné funkce.

```

begin
   $x_1 := h(x_1, x_2);$ 
   $x_1 := \Phi_1(x_1, x_3);$ 
end

```

O funkci  $g$  jsme ovšem dokázali, že není vyčíslitelná. Dostáváme tedy spor.