Príklad 1

Dokažte, že tyto dvě množiny nejsou spočetné:

1. Množina všech podmnožin $\mathbb{N}$

Čo chceme dokázať?

Spočetná množina: Množina $\mathbb{M}$ je spočetná práve vtedy keď existuje funkcia (nie nutne vyčísliteľná) $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ taká, že f je bijekcia (f je surjektívna a injektívna).

Negácia definície: Množina $\mathbb{M}$ **nie je** spočetná práve vtedy keď **pre všetky** funkcie $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ platí, že f **nie je** bijekcia.

Dokazované tvrdenie: Množina $2^{\mathbb{N}}$ (značí sa aj $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) nie je spočetná, teda pre všetky $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ platí, že f nie je bijekcia.

Úvaha: Dokazovať niečo o všetkých funkciách (alebo iných entitách) priamo je väčšinou dosť náročné (hlavne pokiaľ nie je možné použiť indukciu). Teda sa uchýlime k dôkazu sporom (alebo ako hovorí prvé pravidlo dokazovania - keď neviete, skúste to sporom).

Poznámka: Dôkaz sporom je založený na pozorvaní, že pokiaľ $\neg A \Rightarrow B$ a súčasne $\neg A \Rightarrow \neg B$, potom musí platiť A (dá sa jednoducho overiť skonštruovaním príslušnej logickej tabuľky ;))

Dôkaz:

Z poznámky vyplíva že potrebujeme vedieť ako vyzerá $\neg A$. V tomto prípade stačí zameniť negáciu definície spočetnosti za pôvodnú, nenegovanú definíciu. Teda vo výsledku dostávame nasledujúce tvrdenie:

Pre spor predpokladajme, že množina $2^{\mathbb{N}}$ je spočetná, a teda že existuje funkcia $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ ktorá je bijekciou.

Teraz potrebujeme nájsť vhodné tvrdenie B tak, aby sme získali spor. To je samozrejme netriviálna úloha na ktorú neexistuje jednoznačný postup. Prvé na čo by sme sa ale v tomto prípade mali pozrieť je čo "nové"vnáša do nášho "sveta"náš (zatiaľ údajne) sporný predpoklad. V tomto prípade nám predpoklad dáva existenciu funkcie f, ktorá je bijekciou. Teda môžeme pomerne bezpečne predpokladať, že f sa nejakým spôsobom bude vyskytovať v B, a že bude nutné využiť fakt že ide o bijekciu (Inak by sme rovanký spor mohli použiť aj bez predpokladu $\neg A$, a teda by sme dokázali že celý systém je sporný.).

Druhá vec, ktorá by sa s najväčšou pravdepodobnosťou v tvrdení B mala objaviť je potom samotná množina $2^{\mathbb{N}}$. Prečo? Tento krát to nie je také očividné ako s funkciou f, ale dá sa argumentovať že ak je definičným oborom f práve $2^{\mathbb{N}}$, a f je bijekciou (čo je definícia ktorá silne súvisí s definičným oborom a oborom hodnôt), tak bude asi nejakým spôsobom nutné tento fakt využiť.

Pokiaľ stále nevieme ako by bolo možné B skonštruovať, môžeme pokračovať jemne redukcionistickou úvahou, a to síce: Chceme výrok ktorý sa nejakým spôsobom vyjadruje o množine. Množina je súborom prvkov. Teda hľadáme nejaký prvok ktorý nám vyvolá spor. Asi najočividnejší spor v súvislosti s množinami sa týka príslušnosti do množiny: Teda prvok ktorý do množiny zároveň patrí aj nepatrí. Prvý nápad by teda mohol byť "hľadať podmnožinu $\mathbb{N}$ ktorá zároveň nie je podmnožinou $\mathbb{N}$". To sa nám bohužiaľ v tomto prípade asi nepodarí. Na druhej strane si ale pri tom môžeme všimnúť, že pvky $2^{\mathbb{N}}$ sú opäť množiny. Čo keby sme teda dokázali vyvolať nejaký problém tam...

Nech $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f^{-1}(x)\}$ (f^{-1} existuje, keďže f je bijekcia). Táto definícia sa dá prepísať vo forme ekvivalencie $x \in B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(x)$.

Ďalej očividne $B \subseteq \mathbb{N}$, teda musí existovať prirodzené číslo i také, že $B = f(i)$ (z definície spočetnosti). Pre toto i dostávame (z definície B) že $i \in B \Leftrightarrow i \notin f^{-1}(i)$. Ale keďže $B = f(i)$, tak $i \in B \Leftrightarrow i \notin B$.

Pre úplnosť: Dostávame teda dve tvrdenia: Ak je $2^{\mathbb{N}}$ spočetná, potom $f(i) \in B$ a zároveň ak je $2^{\mathbb{N}}$ spočetná, tak $f(i) \notin B$. Teda logicky plynie že $2^{\mathbb{N}}$ nie je spočetná.

Příklad 13

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je vyčislitelná bijekce. Uvažujme numeraci unárních vyčíslitelných funkcí

$$\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n, ... \tag{1}$$

kde $\psi_n = \varphi_{f(n)}$. Dokažte, že pro tuto numeraci existuje vyčíslitelná univerzální funkcie $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Ukažte, že existuje a takové, že funkce Ψ je počítána programem $P_{f(a)}$.

Zmení sa tvrdenie ak by f nebola injektívna/surjektívna, ale stále totálna?

Čo chceme dokázať?

Numerácia: Numerácia množiny M je surjektívna (nie nutne totálna) funkcia $f : M \to \mathbb{N}$.

Univerzálna funkcia: Univerzálna funkcia Ω pre numeráciu (unárnych) funkcií ω je funkcia $\Omega : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taká, že $\Omega(e, x) = \omega_e(x)$. (teda najprv v numerácií nájdem funkciu s indexom e a potom ju spustím so vstupom x)

Našou úlohou je teda ukázať, že pre danú numeráciu (nazvime si ju ψ), existuje **vyčísliteľná** univerzálna funkcia.

Dôkaz:

Pokiaľ chceme ukazovať vyčísliteľnosť, najjednoduššie je väčšinou nájsť program ktorý počíta to, čo potrebujeme. Z definície univerzálnej funkcie vidíme, že na to, aby sme spočítali jej hodnotu, potrebujeme najskôr zistiť čo za funkciu vlastne vyčísľujeme (podľa indexu daného prvým argumentom). V prípade štandardnej numerácie na toto slúži kódovanie programov na indexy ktoré bolo definované na prednáške. V prípade našej novej numerácie sa musíme pozrieť na to, ako je vlastne definovaná. Podľa zadania máme k dispozícií vyčísliteľnú bijekciu f ktorá mapuje indexy našej novej numerácie na indexy štandardnej numerácie ($\psi_n = \varphi_{f(n)}$). A o štandardnej numerácií vieme, že má vyčísliteľnú univerzálnu funkciu. Teda nám nič nebráni najskôr spočítať funkciu f, aby sme získali index programu v štandardnej numerácií, a potom pustiť štandardnú univerzálnu funkciu nad týmto indexom:

$\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} :$

$y := f(x_1); x_1 := \Phi(y, x_2)$

Takáto funkcia je vyčísliteľná (f aj Φ sú vyčísliteľné) a spĺňa definíciu univerzálnej funkcie, keďže $\Psi(e, x) = \Phi(f(e), x) = \varphi_{f(e)}(x) = \psi_e(x)$.

Z definície bijekcie potom plynie, že všetky vyčísliteľné funkcie majú index v numerácií ψ, a teda aj Ψ má nejaký index a taký, že je počítaná programom $P_{f(a)}$ (keďže je vyčísliteľná).

Pokiaľ by f nebola injektívna, nič sa nezmení (stále platí že všetky vyč. funkcie majú index v ψ, len sa môže sať že jeden program má viac indexov). Pokiaľ by ale f nebola surjektívna, a nemusí existovať.

Příklad 16

Ukažte, že existuje TVF $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x) \tag{2}$$

(súčet je definovaný len ak oba argumenty sú definované)

Čo chceme dokázať?

To že g definované v zadaní existuje, je pomerne triválne pozorovanie. Problémom je ukázať, že g je totálne a vyčísliteľné. K tomu nám poslúži práve veta o parametrizácií.

Veta o parametrizácií: Pre všetky $m \geq 1$, $n \geq 1$ existuje totálne vyčísliteľná funkcia $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ taká, že

$$\varphi^n_{s_n^m(i,y_1,...,y_m)}(z_1, ..., z_n) = \varphi_i^{m+n}(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n) \tag{3}$$

Dôkaz: Uvažujme vyčísliteľnú funkciu $f(i, j, x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$ (jej while program je dúfam zjavný :))

Keďže f je vyčísliteľná, existuje index e taký, že $\varphi_e = f$. Priamou aplikáciou vety o parametrizácií potom dostávame, že existuje totálne vyčísliteľná s_1^2 taká, že:

$$\varphi_{s_1^2(a,i,j)}(x) = \varphi_a(i, j, x) \tag{4}$$

Nakoniec, pokiaľ zadefinujeme g ako $g(i, j) = s_1^2(e, i, j)$ (teda argument a sme zafixovali na konštantu e) dostávame:

$$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_{s_1^2(e,i,j)}(x) = \varphi_e(i, j, x) = f(i, j, x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x) \tag{5}$$