

MA002 Matematická analýza

Krivkový integrál

Peter Šepitka

Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu
- 3 Krivkový integrál druhého druhu
- 4 Greenova veta a nezávislosť na integračnej ceste

Obsah

- 1 **Krivky a ich parametrizácie**
- 2 Krivkový integrál prvého druhu
- 3 Krivkový integrál druhého druhu
- 4 Greenova veta a nezávislosť na integračnej ceste

Skalárne a vektorové funkcie

Definícia 1

Nech n, m sú prirodzené čísla. Zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sa nazýva **reálna m -vektorová funkcia n reálnych premenných**. Každému n -rozmernému vektoru $x \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ sa priradí práve jeden m -rozmerný vektor

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m,$$

Funkcie f_1, f_2, \dots, f_m sa nazývajú **zložky** vektorovej funkcie f .

Nech $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ je vektorová funkcia n premenných. Potom

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \dots \cap \mathcal{D}(f_m).$$

Ak $m = n = 1$, funkcia f sa nazýva aj **skalárne pole**. V prípade $m = n \geq 2$ hovoríme o **vektorovom poli**. Limita a spojitosť vektorovej funkcie f sa definuje po jednotlivých jej zložkách f_i , t.j.,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right).$$

Pojem krivky v \mathbb{R}^m

Definícia 2

Nech m je prirodzené číslo a $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je interval. **Krivkou** v \mathbb{R}^m rozumieme každú vektorovú funkciu $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$, ktorá je spojitá na \mathcal{I} . Množina

$$\langle \varphi \rangle := \varphi(\mathcal{I}) = \{\varphi(t), t \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sa nazýva **geometrický obraz (trajektória) krivky** φ . Funkcia φ sa potom označuje ako **parametrizácia množiny** $\langle \varphi \rangle$. Ak $\mathcal{I} = [a, b]$ je kompaktný interval, potom $\varphi(a)$ je **začiatkový bod** a $\varphi(b)$ je **koncový bod** krivky.

Definícia 3

Krivka $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ sa nazýva

- **jednoduchá**, ak funkcia φ je prostá na $[a, b]$;
- **uzavretá**, ak $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **Jordanova**, ak funkcia φ je prostá na $[a, b)$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$, t.j., φ je **jednoduchá uzavretá krivka**.

Veta 1 (Jordanova)

Nech φ je Jordanova krivka v \mathbb{R}^2 . Potom existujú dve súvislé oblasti G_1 a G_2 tak, že každý bod z $\mathbb{R}^2 \setminus \langle \varphi \rangle$ patrí práve do jednej z nich. Oblasti G_1 a G_2 sú teda disjunktné a platí $G_1 \cup G_2 \cup \langle \varphi \rangle = \mathbb{R}^2$, pričom trakejtória $\langle \varphi \rangle$ krivky φ je spoločná hranica množín G_1 a G_2 .

Poznamenajme, že práve jedna z oblastí G_1 a G_2 je ohraničená a nazýva sa **vnútro krivky φ** – $\text{Int } \varphi$. Druhá, neohraničená oblasť sa potom označuje ako **vonkajšok krivky φ** – $\text{Ext } \varphi$.

Príklad 1

Graf každej reálnej funkcie f jednej reálnej premennej t , ktorá je spojitá na nejakom intervale \mathcal{I} , je trajektóriou jednoduchej krivky v \mathbb{R}^2 . Zobrazenie φ

$$\mathcal{I} \ni t \mapsto \varphi(t) = (t, f(t)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

je totiž spojité a prosté na intervale \mathcal{I} , a je teda jednoduchou krivkou v \mathbb{R}^2 .

Príklad 2

Kružnica

$$x = 3 + 2 \cos t, \quad y = 2 + 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je jednoduchá uzavretá krivka v \mathbb{R}^2 , teda Jordanova krivka. Rovnice

$$x = 3 + 2 \cos t, \quad y = 2 + 2 \sin t, \quad t \in [0, 3\pi],$$

určujú trajektóriu krivky, ktorá nie je ani jednoduchá, ani uzavretá. Rovnice

$$x = 3 + 2 \cos 2t, \quad y = 2 + 2 \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

popisujú krivku v \mathbb{R}^2 , ktorá je uzavretá, ale nie je jednoduchá.

Príklad 3

Bernoulliho lemniskáta

$$x = \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{a\sqrt{2} \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0,$$

je uzavretá krivka v \mathbb{R}^2 , ale nie je jednoduchá.

Príklad 4

Cykloida

$$x = rt - d \sin t, \quad y = r - d \cos t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad r, d > 0,$$

nie je uzavretá krivka v \mathbb{R}^2 . Obyčajná cykloida ($r = d$) a skrátaná cykloida ($r > d$) sú jednoduché krivky, kým predĺžená cykloida ($r < d$) nie je jednoduchá krivka.

Definícia 4 (Transformácia parametra)

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ sú krivky. Povieme, že φ a ψ sú **ekvivalentné** a píšeme $\varphi \sim \psi$, ak existuje spojito diferencovateľné zobrazenie $w : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ také, že $w'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [\alpha, \beta]$ a platí

$$\varphi(w(t)) = \psi(t) \quad \text{pre každé } t \in [\alpha, \beta].$$

Pre funkciu w z Definície 4 platí, že jej derivácia $w'(t)$ nemení znamienko na $[\alpha, \beta]$, a teda w je buď rastúca alebo klesajúca na $[\alpha, \beta]$. Preto funkcia w je prostá a jej inverzia w^{-1} je tiež spojito diferencovateľná na $[a, b]$. Relácia \sim je teda skutočne ekvivalencia a platí $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$, t.j., zachováva trajektórie kriviek. Definícia 4 potom vyjadruje transformáciu parametrizácie množiny $\langle \varphi \rangle$.

Príklad 5

Uvažujme krivky φ a ψ dané

$$\varphi : x = t, \quad y = t, \quad t \in (0, 1),$$

$$\psi : x = t^3, \quad y = t^3, \quad t \in (0, 1).$$

Trajektóriou oboch kriviek je otvorená úsečka spájajúca body $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Krivky φ a ψ sú ekvivalentné s funkciou $w : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ tvaru $w(t) = t^3$.

Definícia 5 (Operácie s krivkami)

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ sú krivky spĺňajúce $\varphi(b) = \psi(\alpha)$.
Súčtom kriviek φ a ψ rozumieme krivku $\varphi \oplus \psi$ danú

$$(\varphi \oplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \psi(t + \alpha - b), & t \in [b, b + \beta - \alpha]. \end{cases} \quad (1)$$

Opačnou krivkou ku krivke φ rozumieme krivku $\ominus \varphi$ danú

$$(\ominus \varphi)(t) := \varphi(-t), \quad t \in [-b, -a]. \quad (2)$$

Priamo z Definície 5 vyplýva $\langle \ominus \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$ a $\langle \varphi \oplus \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle$. Operácia \oplus je asociatívna, t.j., pre každé tri krivky φ , ψ a ω v \mathbb{R}^m platí

$$(\varphi \oplus \psi) \oplus \omega = \varphi \oplus (\psi \oplus \omega),$$

ak aspoň jedna strana rovnosti má zmysel. **Rozdiel kriviek** φ a ω definujeme

$$\varphi \ominus \psi := \varphi \oplus (\ominus \psi), \quad (3)$$

ak súčet $\varphi \oplus (\ominus \psi)$ je definovaný, t.j., platí $\varphi(b) = \psi(\beta)$.

Nech $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ je krivka v \mathbb{R}^m definovaná na kompaktnom intervale $[a, b]$. **Deriváciou krivky** φ v bode $t \in [a, b]$ rozumieme vektor

$$\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_m(t)), \quad (4)$$

prícom pre $t = a$, resp. $t = b$ uvažujeme príslušné jednostranné derivácie φ_i , t.j.,

$$\varphi'(a) = ((\varphi_1)'_+(a), \dots, (\varphi_m)'_+(a)), \quad \varphi'(b) = ((\varphi_1)'_-(b), \dots, (\varphi_m)'_-(b)).$$

Ak $\varphi'(t) \neq 0$, vektor $\varphi'(t)$ sa nazýva **dotykový vektor** ku krivke φ v bode t a vektor $\tau(t) := \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ je **jednotkový dotykový vektor**. Pripomeňme, že

$$\|\varphi'(t)\| := \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2}$$

je (euklidovská) norma, resp. veľkosť vektora $\varphi'(t)$. Priamka definovaná

$$\{\varphi(t) + h\varphi'(t), \quad h \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

sa označuje ako **dotyčnica krivky** φ v bode t . Dotyčnica sa zo všetkých priamok prechádzajúcich cez bod $\varphi(t)$ najviac primkýna ku trajektórii krivky φ .

Definícia 6 (Hladká a po častiach hladká krivka)

Krivka $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ sa nazýva **hladká**, ak vektorová funkcia φ je spojito diferencovateľná na $[a, b]$ a $\varphi'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [a, b]$. V prípade uzavretej hladkej krivky navyše požadujeme $\varphi'(a) = \varphi'(b)$. Krivka φ sa označuje ako **po častiach hladká**, ak existuje konečné delenie

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu $[a, b]$ také, že krivka $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$ je hladká pre každé $k = 1, \dots, n$.

V prípade po častiach hladkej krivky φ teda existuje najviac konečne veľa izolovaných bodov t , v ktorých $\varphi'(t)$ neexistuje. Jednoduchá hladká krivka sa nazýva **oblúk** (príp. **hladký oblúk**). Ak v Definícii 6 vynecháme podmienku nenulovosti derivácie φ' na intervale $[a, b]$, dostaneme tzv. **regulárnu**, resp. **po častiach regulárnu krivku**. Po častiach regulárna krivka sa nazýva aj **cesta**.

Príklad 6

Kružnica alebo elipsa sú jednoduché hladké krivky (Jordanove hladké krivky).
Obvod štvorca alebo obdĺžnika je jednoduchá po častiach hladká krivka.

Príklad 7

Asteroida

$$\varphi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad a > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je príkladom jednoduchéj uzavretej regulárnej krivky (Jordanova regulárna krivka). Nie je však hladkou krivkou, nakoľko derivácia

$$\varphi'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$$

má nulovú hodnotu v bodoch $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Podľa Definície 6 nie je ani po častiach hladkou krivkou. Ako ukážeme neskôr, vhodnou transformáciou parametra získame krivku, ktorá má rovnakú trajektóriu a je po častiach hladká.

Orientácia krivky

Nech φ je krivka v \mathbb{R}^m definovaná na intervale \mathcal{I} . Stanoviť **orientáciu** krivky φ znamená zvoliť nejaké usporiadanie na množine $\langle \varphi \rangle$, t.j., chceme určiť, ktorým smerom sa pohybujeme po trajektórii krivky. Ak pre každú dvojicu $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ s $t_1 < t_2$ platí, že bod $\varphi(t_1)$ je pred bodom $\varphi(t_2)$ v danom usporiadaní (pohybom po $\langle \varphi \rangle$ prechádzame najprv bodom $\varphi(t_1)$ a až potom bodom $\varphi(t_2)$), t.j.,

$$\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2) \iff t_1 < t_2, \quad (6)$$

potom krivka φ je **orientovaná súhlasne s parametrizáciou** φ . V prípade, ak

$$\varphi(t_2) \prec \varphi(t_1) \iff t_1 < t_2, \quad (7)$$

krivka φ je **orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou** φ . Krivka s usporiadaním \prec sa označuje ako **orientovaná krivka**. V prípade kompaktného intervalu $\mathcal{I} = [a, b]$ a orientovanej krivky φ je možné jeden z krajných bodov $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ vyhlásiť za začiatočný bod a druhý za koncový bod krivky φ . Opačná krivka má opačnú orientáciu. Orientácia Jordanovej krivky je zadaná smerom dotykového vektora v jednom bode krivky. Jordanova krivka je potom **kladne orientovaná**, ak je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek. V opačnom prípade hovoríme o **záporne orientovanej** Jordanovej krivke.

Delenie a dĺžka krivky

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je krivka súhlasne orientovaná s parametrizáciou a uvažujme konečné delenie intervalu $[a, b]$, t.j.,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Body $P_i = \varphi(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, trajektórie $\langle \varphi \rangle$ potom zrejme spĺňajú relácie

$$P_0 \prec P_1 \prec \dots \prec P_n.$$

Množina bodov $D = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sa nazýva **delenie krivky** φ . Ak krivka φ je uzavretá, požadujeme $P_0 = P_n$. Množinu $\langle \varphi \rangle$ aproximujeme lomenou čiarou L tvorenou úsečkami $\overline{P_{i-1}P_i}$ pre $i = 1, \dots, n$, t.j.,

$$L = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}. \quad (8)$$

Pre jej dĺžku $m_1(L)$ potom platí

$$m_1(L) = |\overline{P_0P_1}| + \dots + |\overline{P_{n-1}P_n}| \quad (9)$$

Definícia 7 (Dĺžka krivky)

Ak existuje reálne číslo M také, že pre každú lomenú čiaru L v (8) platí

$$m_1(L) \leq M,$$

potom povieme, že krivka φ **má konečnú dĺžku** alebo **je rektifikovateľná**. Najmenšie takéto číslo M nazveme **dĺžka krivky** φ a označíme $m_1(\langle\varphi\rangle)$.

Ak krivka φ má konečnú dĺžku, potom množina reálnych čísiel

$$\{m_1(L), L \text{ je lomená čiara v (8)}\}$$

je neprázdna a zhora ohraničená, a má teda suprérum rovné $m_1(\langle\varphi\rangle)$.

Veta 2

Každá regulárna krivka $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ má konečnú dĺžku a platí

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2} dt.$$

Vzorec vo Vete 2 platí aj v prípade po častiach hladkej krivky φ .

Príklad 8

Uvažujme skrutkovicu φ v \mathbb{R}^3 danú parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Krivka φ je regulárna (dokonca hladká) a pre každé $t \in [0, 2\pi]$ platí

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Preto daná skrutkovica je rektifikovateľná krivka a má dĺžku

$$m_1(\langle \varphi \rangle) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Príklad 9

Krivka φ v \mathbb{R}^2 daná

$$x = t, \quad y = \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad t \in [-1, 1],$$

nemá dĺžku, pretože množina reálnych čísel $m_1(L)$ je zhora neohraničená.

Prirodzená parametrizácia krivky

Pre každú krivku konečnej dĺžky je možné zvoliť jej parametrizáciu tak, aby parameter vyjadroval priamo dĺžku krivky. Konkrétne, ak s_1, s_2 sú dve hodnoty parametra spĺňajúce $s_1 < s_2$, potom časť krivky odpovedajúca intervalu $[s_1, s_2]$ má dĺžku $s_2 - s_1$. Takejto parametrizácii hovoríme **prirodzená parametrizácia krivky**. Ak $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je hladká krivka, potom funkcia

$$s(t) = \int_a^t \|\varphi'(u)\| \, du$$

je definovaná a spojitou diferencovateľná na intervale $[a, b]$ s $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$. Nakoľko $\|\varphi'(t)\| > 0$ na $[a, b]$, funkcia $s(t)$ je rastúca na $[a, b]$ s oborom hodnôt $[0, m_1(\langle\varphi\rangle)]$. Ak $w(s)$ je funkcia inverzná k $s(t)$, potom parametrizácia

$$\varphi(w(s)), \quad s \in [0, m_1(\langle\varphi\rangle)],$$

je práve prirodzenou parametrizáciou krivky φ . Poznamenajme, že podľa Definície 4 sú krivky φ a $\varphi \circ w$ ekvivalentné, a teda majú rovnaké trajektórie.

Príklad 10

Nájdime prirodzenú parametrizáciu časti asteroidy z Príkladu 7. Platí

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\varphi'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{(-3a \cos^2 u \sin u)^2 + (3a \sin^2 u \cos u)^2} \, du \\ &= \frac{3a}{2} \sin^2 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

z čoho $s(\pi/2) = 3a/2$. Inverzná funkcia $w(s)$ je teda definovaná na intervale $[0, 3a/2]$ a platí

$$w(s) = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Prirodzená parametrizácia časti krivky φ má potom tvar

$$x = a(1 - 2s/3a)^{3/2}, \quad y = a(2s/3a)^{3/2}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Krivky φ a $\varphi \circ w$ však v tomto prípade nie sú ekvivalentné, hoci majú rovnakú trajektóriu. Krivka φ totiž nie je hladká na $[0, \pi/2]$ (v bodoch $t = 0$ a $t = \pi/2$ má nulovú deriváciu), kým krivka $\varphi \circ w$ je hladká na $[0, 3a/2]$.

Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu**
- 3 Krivkový integrál druhého druhu
- 4 Greenova veta a nezávislosť na integračnej ceste

Krivkový integrál I. druhu

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je hladká krivka a nech $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia (m premenných). Pre $n \in \mathbb{N}$ uvažujme delenie intervalu $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

a k nemu prislúchajúce delenie krivky φ

$$D_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}, \quad P_i = \varphi(t_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Body P_0, \dots, P_n rozdelia krivku φ na n úsekov $s_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \dots, n$, ktoré sa nazývajú **elementy krivky** φ . Dĺžku elementu s_i označíme $m_1(s_i)$. Číslo

$$\|D_n\| := \max\{m_1(s_1), \dots, m_1(s_n)\}$$

sa nazýva **norma delenia** D_n . V každej z množín $\langle s_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, ľubovoľne zvolíme bod M_i a utvoríme **integrálny súčet funkcie** f s delením D_n krivky φ a s výberom bodov M_1, \dots, M_n

$$S(f, D_n) := \sum_{i=1}^n f(M_i) m_1(s_i). \quad (10)$$

Definícia 8 (Krivkový integrál I. druhu)

Hovoríme, že existuje **krivkový integrál prvého druhu** z funkcie f po krivke φ , ak pre každú postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ takú, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0, \quad (11)$$

príslušná postupnosť $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f **konverguje** pre každý výber bodov M_1, \dots, M_n .

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ s vlastnosťou (11) nazývame **normálnou**. Ak existuje krivkový integrál I. druhu z funkcie f po krivke φ , potom všetky postupnosti $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f z Definície 8 majú rovnakú limitu. Túto limitu nazývame **krivkovým integrálom I. druhu** z funkcie f po krivke φ a označujeme

$$\int_{\varphi} f(x) ds, \quad \text{t.j.,} \quad \int_{\varphi} f(x) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n). \quad (12)$$

Všimnime si, že Definícia 8 nevyžaduje, aby krivka φ bola jednoduchá. Navyiac, krivkový integrál (12) sa dá definovať i v prípade po častiach hladkej krivky φ .

Základné vlastnosti krivkových integrálov I. druhu

V nasledujúcich vetách budeme uvažovať po častiach hladké krivky.

Veta 3 (Linearita vzhľadom na integrand)

Nech existujú integrály $\int_{\varphi} f(x) ds$ a $\int_{\varphi} g(x) ds$ a nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom existuje aj integrál $\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] ds$ a platí

$$\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] ds = \alpha \int_{\varphi} f(x) ds + \beta \int_{\varphi} g(x) ds.$$

Veta 4 (Aditivita vzhľadom na integračný obor)

Nech φ a ψ sú krivky také, že súčet $\varphi \oplus \psi$ je definovaný. Nech existujú integrály $\int_{\varphi} f(x) ds$, $\int_{\psi} f(x) ds$ a $\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) ds$. Potom platí

$$\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) ds = \int_{\varphi} f(x) ds + \int_{\psi} f(x) ds.$$

Veta 5 (Nezávislosť na orientácii krivky)

Nech φ je orientovaná krivka. Potom integrál $\int_{\varphi} f(x) ds$ existuje práve vtedy, keď existuje integrál $\int_{\ominus\varphi} f(x) ds$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_{\ominus\varphi} f(x) ds.$$

Veta 6 (Nezávislosť na ekvivalentnej parametrizácii krivky)

Nech φ a ψ sú ekvivalentné krivky. Potom integrál $\int_{\varphi} f(x) ds$ existuje práve vtedy, keď existuje integrál $\int_{\psi} f(x) ds$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_{\psi} f(x) ds.$$

Veta 7 (Dĺžka krivky)

Pre dĺžku rektifikovateľnej krivky φ platí $m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds$.

Veta 8

Nech existujú integrály $\int_{\varphi} f(x) ds$ a $\int_{\varphi} g(x) ds$ a nech $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle \varphi \rangle$. Potom platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds \leq \int_{\varphi} g(x) ds.$$

Veta 9

Nech φ je rektifikovateľná krivka a nech $h, H \in \mathbb{R}$ sú také, že $h \leq f(x) \leq H$ pre každé $x \in \langle \varphi \rangle$. Nech existuje integrál $\int_{\varphi} f(x) ds$. Potom platia nerovnosti

$$h m_1(\langle \varphi \rangle) \leq \int_{\varphi} f(x) ds \leq H m_1(\langle \varphi \rangle).$$

Výpočet krivkového integrálu I. druhu

Prakticky sa krivkový integrál I. druhu vypočíta prevodom na určitý (Riemannov) integrál z funkcie jednej premennej podľa nasledujúcej vety.

Veta 10

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je po častiach hladká krivka a nech $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, t.j., existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(x)| \leq M$ pre každé $x \in \langle \varphi \rangle$. Ďalej nech existuje Riemannov integrál

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Potom existuje i krivkový integrál $\int_{\varphi} f(x) ds$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Príklad 11

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, ds,$$

kde $\langle \varphi \rangle$ je časť grafu funkcie $y = \cos x$ na intervale $[0, \pi/2]$. Krivka φ má napríklad parametrizáciu

$$x(t) = t, \quad y(t) = \cos t, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Krivka φ je hladká, pričom

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -\sin t) \implies \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Podľa Vety 10 potom platí

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, ds = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

Príklad 12

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

kde φ je skrutkovica s parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Platí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 t^2$ pre každé $t \in [0, 2\pi]$ a

$$x'(t) = -a \sin t, \quad y'(t) = a \cos t, \quad z'(t) = b,$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

V súlade s Vetou 10 potom máme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \left(a^2 + \frac{4}{3} \pi^2 b^2 \right). \end{aligned}$$

Aplikácie krivkového integrálu I. druhu

- Dĺžka krivky

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds. \quad (13)$$

- Hmotnosť krivky s hustotou $\rho = \rho(x)$

$$M(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} \rho(x) ds. \quad (14)$$

- Obsah valcovej plochy

$$m_2(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} f(x, y) ds. \quad (15)$$

Dĺžka krivky

Príklad 13

Vypočítajte dĺžku reťazovky, ktorá je grafom funkcie

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad \text{pre } a = \frac{3}{2} \quad \text{a } x \in [-2, 2].$$

Zavedieme vhodnú parametrizáciu, napríklad

$$\varphi : x = t, \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Jedná sa o hladkú krivku φ , pričom platí

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right),$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Podľa vzorca (13), resp. podľa Vety 7 potom máme

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right) dt = 2a \sinh \frac{2}{a} = 3 \sinh \frac{4}{3}.$$

Obsah valcovej plochy

Príklad 14

Vypočítajme obsah prednej steny klinu, ktorý vznikol z trojbokého hranola ohraničeného rovinami $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ odsekom plochou $z = 4 - y^2$. Po nakreslení vhodného obrázku zistíme, že máme vypočítať obsah valcovej plochy, ktorej základňou je úsečka

$$x + y = 2, \quad x, y \geq 0,$$

a ktorá je zhora ohraničená grafom funkcie $z = f(x, y) = 4 - y^2$. Vhodne parametrizujeme danú úsečku

$$\varphi : x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, 2].$$

Ide o hladkú krivku s $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Pre hľadaný obsah potom podľa formuly (15) platí

$$m_2(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} f(x, y) \, ds = \int_{\varphi} (4 - y^2) \, ds = \int_0^2 [4 - (2 - t)^2] \sqrt{2} \, dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu
- 3 Krivkový integrál druhého druhu**
- 4 Greenova veta a nezávislosť na integračnej ceste

Krivkový integrál II. druhu

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je hladká orientovaná krivka a nech $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ je ohraničená vektorová funkcia (m premenných). Pre $n \in \mathbb{N}$ uvažujme delenie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ intervalu $[a, b]$ a odpovedajúce delenie krivky φ

$$D_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}, \quad P_i = \varphi(t_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Body P_0, \dots, P_n rozdelia krivku φ na n úsekov $s_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \dots, n$, ktoré sa nazývajú **orientované elementy krivky** φ . Dĺžku elementu s_i označíme $m_1(s_i)$. Číslo

$$\|D_n\| := \max\{m_1(s_1), \dots, m_1(s_n)\}$$

sa nazýva **norma delenia** D_n . V každej z množín $\langle s_i \rangle$ zvolíme ľubovoľne bod M_i a utvoríme **integrálny súčet funkcie** f s delením D_n krivky φ a s výberom bodov M_1, \dots, M_n

$$S(f, D_n) := \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot (P_i - P_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})). \quad (16)$$

Definícia 9 (Krivkový integrál II. druhu)

Hovoríme, že existuje **krivkový integrál druhého druhu** z funkcie f po krivke φ , ak pre každú postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ takú, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0, \quad (17)$$

príslušná postupnosť $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f **konverguje** pre každý výber bodov M_1, \dots, M_n .

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ s vlastnosťou (17) nazývame **normálnou**. Platí, že ak existuje krivkový integrál II. druhu z funkcie f po krivke φ , potom všetky postupnosti $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f z Definície 9 majú rovnakú limitu. Túto limitu potom nazývame **krivkovým integrálom II. druhu** z funkcie f po krivke φ a označujeme

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr, \quad \text{t.j.,} \quad \int_{\varphi} f(x) \cdot dr := \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n). \quad (18)$$

Poznamenajme, že podobne ako krivkový integrál I. druhu, tak i krivkový integrál (18) sa dá definovať i v prípade po častiach hladkej orientovanej krivky φ .

Základné vlastnosti krivkových integrálov II. druhu

V nasledujúcich vetách budeme uvažovať po častiach hladké orientované krivky.

Veta 11 (Linearita vzhľadom na integrand)

Nech existujú integrály $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$ a $\int_{\varphi} g(x) \cdot dr$ a nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom existuje aj integrál $\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] \cdot dr$ a platí

$$\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] \cdot dr = \alpha \int_{\varphi} f(x) \cdot dr + \beta \int_{\varphi} g(x) \cdot dr.$$

Veta 12 (Aditivita vzhľadom na integračný obor)

Nech φ a ψ sú krivky súhlasne (nesúhlasne) orientované s parametrizáciou a nech súčet $\varphi \oplus \psi$ je definovaný. Ďalej nech existujú integrály $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$, $\int_{\psi} f(x) \cdot dr$ a $\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) \cdot ds$. Potom platí

$$\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) \cdot dr = \int_{\varphi} f(x) \cdot dr + \int_{\psi} f(x) \cdot dr.$$

Veta 13 (Závislosť na orientácii krivky)

Nech φ je orientovaná krivka. Potom integrál $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$ existuje práve vtedy, keď existuje integrál $\int_{\ominus\varphi} f(x) \cdot dr$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = - \int_{\ominus\varphi} f(x) \cdot dr.$$

Veta 14 (Ekvivalentná parametrizácia krivky)

Nech φ, ψ sú ekvivalentné, rovnako orientované krivky. Potom integrál $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$ existuje práve vtedy, keď existuje integrál $\int_{\psi} f(x) \cdot dr$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = \int_{\psi} f(x) \cdot dr.$$

Výpočet krivkového integrálu II. druhu

Prakticky sa krivkový integrál II. druhu počíta prevodom na určitý (Riemannov) integrál z funkcie jednej premennej.

Veta 15

Nech $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je po častiach hladká orientovaná krivka a nech $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ je ohraničená vektorová funkcia. Nech existuje Riemannov integrál

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Potom existuje i integrál $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$ a platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = \pm \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

pričom znamienko + platí v prípade súhlasnej orientácie a znamienko – platí v prípade nesúhlasnej orientácie krivky φ s jej danou parametrizáciou.

Ak $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ majú ako vektorové funkcie tvar

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad f = (f_1, \dots, f_m),$$

potom sa krivkový integrál $\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$ dá zapísať v tvare

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = \int_{\varphi} [f_1(x) d\varphi_1 + \dots + f_m(x) d\varphi_m].$$

Špeciálne v \mathbb{R}^2 , resp. v \mathbb{R}^3 platí

$$\int_{\varphi} [f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy],$$

resp.

$$\int_{\varphi} [f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz].$$

Aplikácie krivkového integrálu II. druhu

- **Obsah vnútra uzavretej krivky v \mathbb{R}^2**

Nech φ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka v \mathbb{R}^2 , ktorá je orientovaná súhlasne so svojou parametrizáciou. Nech \mathcal{A} označuje vnútro krivky φ . Potom pre obsah $S(\mathcal{A})$ oblasti \mathcal{A} platí

$$S(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} (x \, dy - y \, dx). \quad (19)$$

- **Práca silového poľa pozdĺž krivky**

Nech φ je po častiach hladká krivka v \mathbb{R}^m , ktorá je orientovaná súhlasne so svojou parametrizáciou. Uvažujme v \mathbb{R}^m silové pole reprezentované vektorovou funkciou f . Potom pre prácu W tohto silového poľa pozdĺž trajektórie $\langle \varphi \rangle$ platí

$$W = \int_{\varphi} f(x) \cdot dr. \quad (20)$$

Príklad 15

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \int_{\varphi} [(x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy],$$

kde φ je parabola $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, orientovaná v smere rastu premennej x .
Krivku φ parametrizujeme súhlasne s orientáciou, napríklad

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1].$$

Potom platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t), \quad t \in [-1, 1],$$

a podľa Vety 15 (v I dosadíme za premenné x, y parametrické vyjadrenie)

$$\begin{aligned} I &= + \int_{-1}^1 [(t^2 - 2t \cdot t^2) \cdot 1 + ((t^2)^2 - 2t \cdot t^2) \cdot 2t] dt \\ &= \int_{-1}^1 (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2) dt = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Príklad 16

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \int_{\varphi} (y \, dx + z \, dy + x \, dz)$$

po skrutkovici φ s parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ktorá je orientovaná súhlasne s touto parametrizáciou. Vyjadríme diferenciály dx , dy a dz pomocou premennej t , t.j.,

$$dx = x'(t) \, dt = -a \sin t \, dt, \quad dy = y'(t) \, dt = a \cos t \, dt, \quad dz = z'(t) \, dt = b \, dt.$$

Dosadením do integrálu I v zadaní príkladu dostaneme

$$\begin{aligned} I &= + \int_0^{2\pi} [a \sin t \cdot (-a \sin t) + bt \cdot (a \cos t) + a \cos t \cdot b] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t + abt \cos t + ab \cos t) \, dt = -\pi a^2. \end{aligned}$$

Príklad 17

Pomocou krivkového integrálu II. druhu odvodíme vzorec na výpočet obsahu oblasti ohraničenej elipsou φ s polosami a, b , t.j.,

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Elipsa φ je po častiach hladká Jordanova krivka. Uvažujme jej orientáciu súhlasnú s danou parametrizáciou. Potom podľa vzorca (19) pre obsah jej vnútra platí

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} (x \, dy - y \, dx).$$

Pre diferenciály dx a dy máme

$$dx = x'(t) \, dt = -a \sin t \, dt, \quad dy = y'(t) \, dt = b \cos t \, dt.$$

Dosadením do vyššie uvedeného integrálu postupne dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \cos t)] \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab \cos^2 t + ab \sin^2 t] \, dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Príklad 18

Vypočítajme prácu silového poľa $f(x, y, z) = (y, z, x)$, ktorú vykoná posunutím telesa s jednotkovou hmotnosťou z bodu $[-1, 0, e^\pi]$ do bodu $[1, 0, 1]$ pozdĺž krivky φ s vyjadrením

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = e^t.$$

Nech parameter $t \in [0, \pi]$. Potom $\varphi(0) = [1, 0, 1]$ a $\varphi(\pi) = [-1, 0, e^\pi]$, teda daná krivka je orientovaná nesúhlasne s predpísanou parametrizáciou (orientácia krivky v zadaní je od bodu $[-1, 0, e^\pi]$ do bodu $[1, 0, 1]$). Ďalej máme

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\sin t, \cos t, e^t), \quad t \in [0, \pi].$$

Pre hľadajú prácu potom platí

$$\begin{aligned} W &= \int_{\varphi} f(x, y, z) \cdot dr = - \int_0^\pi (\sin t, e^t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, e^t) dt \\ &= \int_0^\pi (\sin^2 t - 2e^t \cos t) dt = 1 + e^\pi + \pi/2. \end{aligned}$$

Vzťah medzi krivkovými integrálmi I. a II. druhu

Ak krivka φ je hladká, t.j., jej derivácia φ' je spojitá a všade nenulová, potom sa krivkový integrál II. druhu pozdĺž krivky φ z nejakej vektorovej funkcie $f(x)$ dá vyjadriť ako krivkový integrál I. druhu pozdĺž φ z istej skalárnej funkcie $g(x)$. Konkrétne, vyjadrenie vo Vete 15 môžeme upraviť

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f(x) \cdot dr &= \pm \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \pm \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \pm \int_a^b \left[f(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \right] \|\varphi'(t)\| dt = \pm \int_a^b g(t) \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \pm \int_{\varphi} g(x) ds, \end{aligned}$$

kde $g(t) := [f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)] / \|\varphi'(t)\|$ je skalárna funkcia definovaná na $[a, b]$. Ak $\tau(t) := \varphi'(t) / \|\varphi'(t)\|$ je jednotkový dotykový vektor ku krivke φ , potom platí

$$\underbrace{\int_{\varphi} f(x) \cdot dr}_{\text{integrál II. druhu z vektorovej funkcie } f} = \underbrace{\int_{\varphi} (f \cdot \tau)(x) ds}_{\text{integrál I. druhu zo skalárnej funkcie } f \cdot \tau} \quad . \quad (21)$$

integrál II. druhu z vektorovej funkcie f

integrál I. druhu zo skalárnej funkcie $f \cdot \tau$

Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu
- 3 Krivkový integrál druhého druhu
- 4 Greenova veta a nezávislosť na integračnej ceste**

Greenova integrálna veta

Veta 16 (Greenova integrálna veta)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblasť v \mathbb{R}^2 a nech $A \subseteq \Omega$ je množina, ktorej hranica je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka φ . Nech $f = (P, Q)$ je vektorová funkcia (vektorové pole) definovaná na oblasti Ω , pričom funkcie P , Q , $\partial P/\partial y$ a $\partial Q/\partial x$ sú spojité na Ω . Potom platí

$$\oint_{\varphi} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_{\bar{A}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (22)$$

kde $\bar{A} := \text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$ je tzv. uzáver množiny A (v metrickom priestore \mathbb{R}^2).

Greenova integrálna veta dáva do súvisu **krivkový integrál II. druhu** z vektorovej funkcie pozdĺž orientovanej **uzavretej rovinnej** krivky a **dvojný integrál** z istej (skalárnej) funkcie po uzávere vnútra tejto krivky. Krivkový integrál II. druhu z vektorovej funkcie pozdĺž **uzavretej** krivky sa niekedy nazýva aj **cirkulácia** vektorovej funkcie (vektorového poľa) pozdĺž uzavretej krivky. Hlavná aplikácia Greenovej vety spočíva v prevedení výpočtu krivkového integrálu II. druhu na výpočet dvojného integrálu, ako ilustrujeme v nasledujúcich príkladoch.

Príklad 19

Daný krivkový integrál II. druhu vyjadrime ako dvojný integrál

$$I = \oint_{\varphi} \left[\sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left(xy + \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right] \right) dy \right],$$

kde φ je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka. Príslušná vektorová funkcia, z ktorej počítame krivkový integrál, má zložky

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = y \left(xy + \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right] \right).$$

Ďalej máme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Podľa Greenovej vety 16 potom formálne platí

$$I = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy = \iint_D y^2 dx dy,$$

kde množina $D = \text{Int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. V súlade s predpokladmi Greenovej vety platí posledná rovnosť na oblasti D neobsahujúcej bod $[x, y] = [0, 0]$.

Príklad 20

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \oint_{\varphi} [2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy],$$

kde $\langle \varphi \rangle$ je kladne orientovaný obvod trojuholníka s vrcholmi $A = [1, 1]$, $B = [2, 2]$ a $C = [1, 3]$. Daný integrál I budeme počítat prevodom na dvojný integrál podľa Greenovej vety. Zložky podintegrálnej vektorovej funkcie sú

$$P(x, y) = 2(x^2 + y^2), \quad Q(x, y) = (x + y)^2,$$

príčom príslušné parciálne derivácie P'_y , Q'_x majú tvar

$$P'_y = 4y, \quad Q'_x = 2(x + y), \quad Q'_x - P'_y = 2(x - y).$$

Krivka φ je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka a funkcie P , Q , P'_y a Q'_x sú spojité na celom \mathbb{R}^2 . Podľa Greenovej vety 16 potom platí

$$I = \iint_D 2(x - y) dx dy,$$

kde množina D predstavuje vnútro spolu s obvodom trojuholníka ABC .

Nezávislosť na integračnej ceste I

Príklad 21 (Motivačný)

Uvažujme vektorovú funkciu $f(x, y)$ v \mathbb{R}^2 tvaru

$$f(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Vypočítajme krivkový integrál z f pozdĺž paraboly $y = x^2 + 1$, orientovanej od bodu $A = [2, 5]$ do bodu $B = [0, 1]$. Jej parametrizácia

$$x = t, \quad y = t^2 + 1, \quad t \in [0, 2],$$

je potom nesúhlasná s danou orientáciou. Ďalej $x'(t) = 1$ a $y'(t) = 2t$. Preto

$$\begin{aligned} I &= \int_{\text{parabola}} f(x, y) \cdot dr = - \int_0^2 \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2 + (t^2 + 1)^2}} - \frac{t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + (t^2 + 1)^2}} \cdot 2t \right) dt \\ &= \int_0^2 \frac{2t^3 + 3t}{\sqrt{t^4 + 3t^2 + 1}} dt = \sqrt{29} - 1. \end{aligned}$$

Nezávislosť na integračnej ceste II

Príklad 21 (Motivačný)

Vypočítajme teraz krivkový integrál z f pozdĺž úsečky orientovanej od bodu $A = [2, 5]$ do bodu $B = [0, 1]$. Jej parametrizácia má napríklad tvar $x = t$, $y = 1 + 2t$, $t \in [0, 2]$. Potom $x'(t) = 1$ a $y'(t) = 2$ a

$$\begin{aligned} J &= \int_{\text{úsečka}} f(x, y) \cdot dr = - \int_0^2 \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2 + (1+2t)^2}} - \frac{1+2t}{\sqrt{t^2 + (1+2t)^2}} \cdot 2 \right) dt \\ &= \int_0^2 \frac{5t+2}{\sqrt{5t^2+4t+1}} dt = \sqrt{29} - 1. \end{aligned}$$

V obidvoch prípadoch sme dostali rovnakú hodnotu krivkového integrálu II. druhu z funkcie f , hoci sme zakaždým integrovali po inej krivke. Okrem toho, parabola i úsečka mali spoločné krajné body a boli rovnako orientované.

Definícia 10 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech f je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Hovoríme, že **krivkový integrál** (II. druhu) z vektorového poľa f **nezávisí** v Ω **na integračnej ceste**, ak pre ľubovoľné dve po častiach hladké orientované krivky φ , ψ , ležiace v Ω a majúce spoločné začiatočný i koncový bod, platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = \int_{\psi} f(x) \cdot dr. \quad (23)$$

Ekvivalentná formulácia nezávislosti krivkového integrálu na integračnej ceste v Definícii 10 je nasledujúca. Krivkový integrál z vektorového poľa f **nezávisí** v Ω **na integračnej ceste**, ak pre každú po častiach hladkú, **uzavretú** orientovanú krivku η , ležiacu v Ω , platí

$$\int_{\eta} f(x) \cdot dr = 0. \quad (24)$$

S problematikou nezávislosti krivkového integrálu na integračnej ceste úzko súvisí pojem tzv. **potenciálového vektorového poľa**.

Definícia 11 (Potenciálové vektorové pole)

Nech f je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Hovoríme, že f je **potenciálové** na Ω , ak existuje funkcia $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (tzv. **potenciál** poľa f , alebo aj **kmeňová funkcia** poľa f) s vlastnosťou

$$f(x) = \text{grad } V(x) := (V'_{x_1}(x), \dots, V'_{x_m}(x)) \quad \text{pre každé } x \in \Omega. \quad (25)$$

Hovoríme, že oblasť Ω je **jednoducho súvislá**, ak každú Jordanovu (jednoduchú uzavretú) krivku ležiacu v Ω je možné spojitо “stiahnuť” do jedného bodu tak, že pri tejto deformácii neopustíme oblasť Ω .

Príklad 22

Ľubovoľný kruh v rovine je jednoducho súvislá oblasť v \mathbb{R}^2 . Naproti tomu medzikružie $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 1 < x^2 + y^2 < 3\}$ nie je jednoducho súvislá oblasť v \mathbb{R}^2 . Zjednodušene povedané, jednoducho súvislá oblasť nemá “diery”.

Veta 17 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech f je vektorové pole definované a spojité na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné.

- (i) Krivkový integrál z vektorového poľa f nezávisí v Ω na integračnej ceste.
- (ii) Vektorové pole f je potenciálové v Ω .

Naviac, v tomto prípade pre každú po častiach hladkú orientovanú krivku φ v oblasti Ω so začiatočným bodom A a s koncovým bodom B platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr = V(B) - V(A), \quad (26)$$

kde V je ľubovoľný potenciál (kmeňová funkcia) vektorového poľa f v Ω .

V prípade potenciálového poľa f teda hodnota krivkového integrálu II. druhu z f závisí iba na začiatočnom a koncovom bode, nie však na výbere konkrétnej cesty spájajúcej tieto dva body.

Veta 18 (Potenciálové pole v \mathbb{R}^2)

Nech $f = (P, Q)$ je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, pričom nech funkcie P, Q majú spojité parciálne derivácie I. rádu na Ω . Potom platí:

- (i) Ak vektorové pole f je potenciálové v Ω , potom

$$\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x \quad \text{na } \Omega. \quad (27)$$

- (ii) Nech navyše oblasť Ω je jednoducho súvislá. Potom rovnosť v (27) implikuje, že vektorové pole f je potenciálové.

Veta 19 (Potenciálové pole v \mathbb{R}^3)

Nech $f = (P, Q, R)$ je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a nech funkcie P, Q, R majú spojité parciálne derivácie I. rádu na Ω . Potom platí:

- (i) Ak vektorové pole f je potenciálové v Ω , potom

$$\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x, \quad \partial Q / \partial z = \partial R / \partial y, \quad \partial R / \partial x = \partial P / \partial z \quad \text{na } \Omega. \quad (28)$$

- (ii) Nech navyše oblasť Ω je jednoducho súvislá. Potom rovnosť v (28) implikuje, že vektorové pole f je potenciálové.

Príklad 23

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Keďže Ω je jednoducho súvislá oblasť, podľa Vety 18 stačí overiť platnosť rovnosti (27) na Ω pre dané pole f . Máme

$$P(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pre príslušné parciálne derivácie funkcií P a Q potom platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad \text{na } \Omega.$$

Podľa Vety 18 je teda vektorové pole f potenciálové na oblasti Ω . Nájďeme teraz všetky jeho kmeňové funkcie (potenciály) v Ω .

Príklad 23

Z Definície 11 vieme, že kmeňová funkcia $V(x, y)$ vektorového poľa f spĺňa na oblasti Ω rovnosti

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (29)$$

Integrovaním prvej rovnosti v (29) podľa premennej x dostaneme

$$V(x, y) = \int V'_x(x, y) dx = \int -x/\sqrt{x^2 + y^2} dx = -\sqrt{x^2 + y^2} + C(y),$$

kde $C(y)$ je (neznáma) integračná funkcia iba premennej y (integrovali sme podľa x , pričom premennú y sme chápali ako konštantu). Dosadením tohto vyjadrenia funkcie $V(x, y)$ do druhej rovnosti v (29) určíme funkciu $C(y)$

$$\begin{aligned} \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C'(y) &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ C'(y) = 0 &\implies C(y) = K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Preto každá kmeňová funkcia vektorového poľa f má všeobecný tvar

$$V(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Poznámka 1

Poznamenajme, že pole f z Príkladu 23 je možné spojito rozšíriť na oblasť

$$\Psi = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}.$$

Podobne, potenciál $V(x, y)$ v (30) je možné definovať na celom \mathbb{R}^2 a rovnosti (27) i (29) platia aj na Ψ . Pole f je teda podľa Definície 11 potenciálové i na oblasti Ψ , hoci Ψ **nie je** jednoducho súvislá oblasť v \mathbb{R}^2 (pozri podmienku na Ω vo Vete 18). Podľa Vety 17 potom hodnota krivkového integrálu

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot dr$$

nezávisí na integračnej ceste φ ležiacej v oblasti Ψ a je rovná rozdielu

$$V(B) - V(A),$$

kde A, B sú začiatkový a koncový bod orientovanej krivky φ .

Príklad 24

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Platí

$$P(x, y) = -y/(x^2 + y^2), \quad Q(x, y) = x/(x^2 + y^2),$$

$$P'_y = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, \quad Q'_x = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2 \quad \text{na } \Omega.$$

Nutná podmienka (27) na to, aby f bolo potenciálové pole, je teda splnená. V tomto prípade ale **nemusí byť** i **postačujúcou** podmienkou (podľa Vety 18(ii)), pretože oblasť Ω teraz **nie je jednoducho súvislá**. A skutočne, ako sa môžeme ľahko presvedčiť, krivkový integrál z f po kružnici $\varphi : x^2 + y^2 = 4$ je rovný

$$\oint_{\varphi} f(x) \cdot dr = \oint_{\varphi} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi \neq 0.$$

Teda krivkový integrál po uzavretej krivke nie je nulový a závisí na integračnej ceste v Ω . Preto podľa Vety 17 vektorové pole f nie je potenciálové.