MA002 Matematická analýza

Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu

Peter Šepitka

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Základné pojmy

Nech $F : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je daná funkcia. Rovnica

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{kde} \quad {}' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

sa nazýva obyčajná diferenciálna rovnica (ODR) prvého rádu. Riešenie (integrál) rovnice (1) je každá funkcia $y = \varphi(x)$, ktorá má deriváciu na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ a

$$[x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x)] \subseteq M \qquad \text{a} \qquad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \qquad \text{pre} \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Graf funkcie $y = \varphi(x)$, t.j., množina

$$\left\{[x, y] \subseteq \mathbb{R}^2,\ \ x \in \mathcal{I},\, y = \varphi(x)\right\},$$

sa nazýva integrálna krivka rovnice (1). Ak je možné (1) upraviť na tvar

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

pre vhodnú funkciu $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, rovnica (2) sa nazýva ODR I. rádu rozriešená vzhľadom na deriváciu. Rovnica (1) sa potom označuje ako nerozriešená vzhľadom na deriváciu.

- Začiatočná (Cauchyho) úloha (problém) – hľadáme riešenie $y = \varphi(x)$ rovnice (2), ktorého integrálna krivka prechádza pevne zvoleným bodom $[x_0, y_0] \in D$, t.j.,
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3}$$
Riešenie úlohy (3) sa nazýva partikulárne riešenie rovnice (2).
- Všeobecné riešenie rovnice (2) – funkcia $y = \varphi(x, C)$ závislá na jednom reálnom parametri C, pomocou ktorej možno vhodnou voľbou C získať riešenie každej úlohy (3), t.j., pre každú voľbu $[x_0, y_0] \in D$.
- Úplné (maximálne) riešenie – problém predlžovania riešení úlohy (3).
- Singulárne riešenie – porušená jednoznačnosť úlohy (3) v každom bode danej integrálnej krivky.

Príklad 1

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Funkcia $y = Cx$ je všeobecné riešenie uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pre každú začiatočnú úlohu

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(x_0) = y_0$$

s $x_0 \neq 0$ je funkcia $y = C_0 x$ pre $C_0 = y_0/x_0$ jej riešením na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Zároveň je to jediné a úplné riešenie tejto začiatočnej úlohy na každom z intervalov $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Príklad 2

$$y' = -y^2.$$

Funkcia $y = (x + C)^{-1}$ je pre každé $C \in \mathbb{R}$ úplným riešením uvedenej rovnice na intervaloch $(-\infty, -C)$ a $(-C, \infty)$, avšak nie je to všeobecné riešenie tejto rovnice. Nezahrňuje napríklad riešenie začiatočnej úlohy

$$y' = -y^2, \quad y(1) = 0.$$

Táto začiatočná úloha má jediné a úplné riešenie $y = 0$ na celej reálnej osi.

Príklad 3

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Funkcie $y = 0$ a $y = x^3$ sú dve rôzne úplné riešenia tejto začiatočnej úlohy. Riešenie $y = 0$ je zároveň singulárnym riešením danej rovnice.

Veta 1 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblasť a $[x_0, y_0] \in D$ je daný bod. Uvažujme začiatočnú úlohu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

kde funkcia $f(x, y)$ je definovaná na D. Platia nasledujúce tvrdenia.

1. *Ak $f(x, y)$ je spojitá na D, potom existuje interval $\mathcal{I}$ a funkcia $\varphi(x)$ tak, že $y = \varphi(x)$ je riešenie úlohy (4) na $\mathcal{I}$.*
2. *Ak naviac i parciálna derivácia $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ je spojitá na D, potom pre každé riešenie $y = \psi(x)$ úlohy (4) definované na nejakom intervale $\mathcal{J}$ platí*

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}.$$

Niektoré špeciálne typy ODR I. rádu

- ODR so separovateľnými premennými

$$y' = g(x)\,h(y). \tag{5}$$

- Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

$$y' = p(x)\,y + q(x). \tag{6}$$

- Bernoulliho diferenciálna rovnica

$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}. \tag{7}$$

- Exaktná diferenciálna rovnica

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y). \tag{8}$$

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. **Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc**
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Definícia a základné pojmy

Nech $n \in \mathbb{N}$. Súbor rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{9}$$

kde $a_{ij}(t)$ a $b_i(t)$, $i, j = 1, \cdots, n$ sú reálne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$ (pripúšťame aj $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$) a znak $'$ znamená $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, sa nazýva systém lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu. Ak $b_i(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$ pre každé $i = 1, \cdots, n$, systém (9) sa nazýva homogénny. V opačnom prípade, t.j., $b_i(t) \not\equiv 0$ pre aspoň jedno $i = 1, \cdots, n$, hovoríme o nehomogénnom systéme.

Zavedením označenia

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

môžeme systém (9) prepísať do tzv. vektorového tvaru

$$x' = A(t)\,x + b(t). \tag{11}$$

Zobrazenia $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ a $t \mapsto x(t)$ sa nazývajú maticová (rádu n) a vektorové (n-vektorové) funkcie na intervale $\mathcal{I}$. Platia pre ne všetky známe vlastnosti matíc a vektorov. Limity, spojitosť, derivovanie a integrovanie maticových a vektorových funkcií sa realizujú vždy po jednotlivých maticových prvkoch, resp. vektorových zložkách.

Systém (11) sa nazýva homogénny, ak $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$. V opačnom prípade je systém (11) nehomogénny a rovnica

$$x' = A(t)\,x$$

sa nazýva pridružený homogénny systém k nehomogénnemu systému (11).

Riešením systému (11) rozumieme každú n-vektorovú funkciu

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))^T$$

definovanú a diferencovateľnú na nejakom podintervale $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, ktorá spĺňa rovnicu (11) na $\mathcal{J}$, t.j.,

$$\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t), \quad t \in \mathcal{J}.$$

Začiatočná (Cauchyho) úloha

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta, \tag{12}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a $\eta \in \mathbb{R}^n$ daný vektor. Riešenie úlohy (12) sa nazýva partikulárne riešenie systému (11).

Existencia a jednoznačnosť riešení

Lema 1

Nech maticová funkcia $A(t)$ a vektorová funkcia $b(t)$ sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcia $\varphi(t)$ je riešenie začiatočnej úlohy (12) *na celom $\mathcal{I}$ práve vtedy keď*

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \quad \textit{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{13}$$

Poznámka 1

Tvrdenie Lemy 1 vyjadruje ekvivalenciu medzi úlohou (12) a integrálnou rovnicou (13). Stačí sa preto obmedziť na vyšetrovanie integrálnej rovnice (13).

Dôkaz Lemy 1.

Nech $t \in \mathcal{I}$ je pevné. Ak $\varphi(s)$ je riešenie úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$, t.j. platí

$$\varphi(t_0) = \eta, \quad \varphi'(s) = A(s)\,\varphi(s) + b(s) \quad s \in \mathcal{I}, \tag{14}$$

potom integráciou oboch strán rovnice (14) od t_0 po t a využitím začiatočnej podmienky $\varphi(t_0) = \eta$ získame integrálnu rovnicu (13), nakoľko

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s,$$

$$\varphi(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Naopak, nech $\varphi(t)$ je riešenie rovnice (13). Potom $\varphi(t_0) = \eta$ a funkcia $\varphi(t)$ je diferencovateľná na $\mathcal{I}$. Derivovaním oboch strán rovnice (13) podľa t dostaneme $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + b(t)$ pre každé $t \in \mathcal{I}$. Dôkaz je úplný. ■

Veta 2 (Existencia a globálna jednoznačnosť riešení)

Nech maticová funkcia $A(t)$ a vektorová funkcia $b(t)$ sú definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$. Potom úloha (12)*, t.j., začiatočná úloha*

$$x' = A(t)\,x + b(t), \quad x(t_0) = \eta$$

má pre každé $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ práve jedno úplné riešenie, t.j., riešenie, ktoré existuje na celom $\mathcal{I}$. Toto riešenie možno vyjadriť ako limitu tzv. Picardovej postupnosti postupných aproximácií $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, kde pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \quad \varphi_{k+1}(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{15}$$

Poznámka 2

Tvrdenie Vety 2 zostane v platnosti, ak za začiatočnú Picardovu aproximáciu $\varphi_0(t)$ zoberieme ľubovoľnú funkciu definovanú a spojitú na $\mathcal{I}$. Limitná funkcia postupnosti $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ nezávisí na výbere funkcie $\varphi_0(t)$.

Dôkaz Vety 2 (náčrt).

1. **Existencia**
   Funkcia $\varphi_k(t)$ je pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ definovaná na celom $\mathcal{I}$. Ukážeme, že postupnosť $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje lokálne rovnomerne (skoro rovnomerne) na intervale $\mathcal{I}$. To zaručuje existenciu funkcie $\varphi(t)$, ktorá je definovaná na celom $\mathcal{I}$ a pre každé $t \in \mathcal{I}$ spĺňa

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \varphi(t), \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi_k(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\varphi(s) + b(s)]\,\mathrm{d}s \tag{17}$$

   Z rovností (16) a (17) vyplýva, že $\varphi(t)$ rieši integrálnu rovnicu (13) na celom $\mathcal{I}$. Podľa Lemy 1 je potom funkcia $\varphi(t)$ riešením začiatočnej úlohy (12) na celom intervale $\mathcal{I}$.

2. **Jednoznačnosť**
   Jednoznačnosť riešenia začiatočnej úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$ sa ukáže pomocou Gronwallovej lemy.

∎

Príklad 4

Začiatočná úloha

$$x_1' = -\frac{x_2}{t} + 9t, \quad x_2' = -\frac{x_1}{t} - 3t, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2$$

má na intervale $(0, \infty)$ jediné úplné riešenie, pretože funkcie

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 9t \\ -3t \end{pmatrix}$$

sú definované a spojité na celom intervale $(0, \infty)$ a bod $t_0 = 1 \in (0, \infty)$. Dá sa ukázať, že hľadaným riešením je dvojica funkcií

$$x_1(t) = 7t^2 - \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad x_2(t) = -5t^2 + \frac{13}{2}t + \frac{1}{2t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Poznámka 3

Picardova metóda postupných aproximácií umožňuje podľa Vety 2 hľadať riešenie $\varphi(t)$ začiatočnej úlohy (12) ako limitu postupnosti $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Ak zavedieme funkcie $\Delta_k(t)$ pre $k \in \mathbb{N}_0$ predpisom

$$\Delta_k(t) := \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

potom je možné riešenie $\varphi(t)$ vyjadriť v tvare nekonečného radu

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{18}$$

V súlade s dôkazom Vety 2 nekonečný funkcionálny rad (18) konverguje lokálne rovnomerne na intervale $\mathcal{I}$. Naviac funkcie $\Delta_k(t)$ spĺňajú pre každé $t \in \mathcal{I}$

$$\Delta_0(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{d}s, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,\Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{19}$$

Príklad 5

Uvažujme homogénnu začiatočnú úlohu

$$x' = Ax, \quad x(0) = (0,1)^T$$

na intervale $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, kde A je reálna konštantná matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podľa Poznámky 3 s $b(t) \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, $t_0 = 0$ a $\eta = (0,1)^T$ pre funkcie $\Delta_k(t)$ platí

$$\Delta_0(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{k+1}(t) = A \int_0^t \Delta_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Pomocou matematickej indukcie vzhľadom na index k možno ukázať

$$\Delta_k(t) = \frac{t^k}{k!} A^k \eta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Príklad 5

Postupnosť matíc $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ je periodická s najmenšou periódou 4, nakoľko

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = -I, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I.$$

Preto pre každé $l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$A^{4l} = I, \quad A^{4l+1} = A, \quad A^{4l+2} = -I, \quad A^{4l+3} = -A.$$

Riešenie $\varphi(t)$ začiatočnej úlohy potom bude mať podľa (18) tvar

$$\varphi(t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \right) \eta + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) A\eta$$

$$= (\cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sin t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Obsah

1 Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie

2 Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc

3 Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

4 Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

5 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov

6 Systémy s konštantnými koeficientami

Homogénny systém

Nech $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc

$$y' = A(t)\, y, \tag{20}$$

kde $A(t)$ je maticová funkcia rádu n definovaná a spojitá na intervale $\mathcal{I}$. Ak $y_1(t)$ a $y_2(t)$ sú dve (úplné) riešenia systému (20) a c_1, c_2 reálne konštanty, potom i funkcia $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ je (úplným) riešením rovnice (20), nakoľko

$$\begin{aligned} y' &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1 A(t)\, y_1 + c_2 A(t)\, y_2 \\ &= A(t)\,(c_1 y_1 + c_2 y_2) = A(t)\, y \end{aligned}$$

na celom intervale $\mathcal{I}$. Táto vlastnosť je kľúčová pri skúmaní štruktúry množiny všetkých riešení systému (20).

Veta 3 (Štruktúra množiny riešení homogénneho systému)

Množina všetkých riešení rovnice (20) na intervale $\mathcal{I}$ tvorí lineárny (vektorový) priestor nad telesom reálnych čísiel.

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií I

Definícia 1 (Lineárna nezávislosť vektorových funkcií)

Nech $k, n \in \mathbb{N}$ a nech $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ sú n-vektorové funkcie definované na nedegenerovanom intervale $\mathcal{I}$. Povieme, že $y_1(t), \dots, y_k(t)$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$, ak existuje nenulová k-tica reálnych čísiel $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ tak, že

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t) = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

V opačnom prípade sa funkcie $y_1(t), \dots, y_k(t)$ nazývajú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$.

Príklad 6

Dokážme, že $2-$vektoré funkcie

$$y_1(t) = (t,\, t)^T, \quad y_2(t) = (t^2,\, t)^T, \quad y_3(t) = (t^3,\, t)^T$$

sú lineárne nezávislé na každom netriviálnom reálnom intervale. Nech $\mathcal{I}$ je takýto interval a nech $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ spĺňajú $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \equiv 0$ na $\mathcal{I}$, t.j.,

Lineárna závislosť a nezávislosť funkcií II

Príklad 6

$$c_1 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{21}$$

Ukážeme, že rovnosť (21) môže na $\mathcal{I}$ nastať iba v prípade $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Trojnásobným derivovaním identity (21) podľa premennej t dostaneme

$$c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_3 = 0.$$

Podobne, dvojnásobné derivovanie rovnosti (21) spolu s $c_3 = 0$ implikuje

$$c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = 0.$$

Teda platí $c_1(t,\, t)^T = 0$ na $\mathcal{I}$, z čoho po derivovaní máme $c_1(1,\, 1)^T = 0$, a tak i $c_1 = 0$. Preto sú funkcie $y_1(t)$, $y_2(t)$ a $y_3(t)$ v súlade s Definíciou 1 lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$.

Lineárna závislosť a nezávislosť riešení

V prípade riešení systému (20) sa vyšetrovanie lineárnej závislosti, resp. nezávislosti prevádza na problém lineárnej závislosti, resp. nezávislosti n-rozmerných reálnych vektorov.

Veta 4 (Lineárna závislosť riešení homogénneho systému)

Nech $k \in \mathbb{N}$ a nech $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)$ sú úplné riešenia systému (20) *na intervale $\mathcal{I}$. Potom funkcie $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), \ldots, y_k(t_0) \in \mathbb{R}^n$ lineárne závislé.*

Dôkaz Vety 4.

Implikácia $\Rightarrow$ platí triviálne podľa Definície 1. Naopak, nech pre $t_0 \in \mathcal{I}$ sú vektory $y_1(t_0), \ldots, y_k(t_0)$ lineárne závislé. Teda existuje nenulová k-tica $(c_1, \ldots, c_k)$ tak, že $c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_k y_k(t_0) = 0$. Podľa Vety 3 je funkcia

$$y(t) := c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t)$$

riešením rovnice (20) na $\mathcal{I}$ spĺňajúcim $y(t_0) = 0$. Z jednoznačnosti riešení systému (20) podľa Vety 2 máme $y(t) \equiv 0$ na celom $\mathcal{I}$. V súlade s Definíciou 1 to potom znamená, že funkcie $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ sú lineárne závislé na $\mathcal{I}$. ■

Dôsledok 1 (Dimenzia priestoru riešení homogénneho systému)

Množina riešení rovnice (20) *na intervale* $\mathcal{I}$ *tvorí lineárny priestor dimenzie* n.

Dôkaz Dôsledku 1.

Z Vety 4 vieme, že dimenzia priestoru riešení systému (20) je najviac n, pretože priestor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionálny. Na druhej strane, táto dimenzia je aspoň n. Vyplýva to z nasledujúcej úvahy. Nech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je kanonická báza priestoru $\mathbb{R}^n$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$. Podľa Vety 2 existujú úplné riešenia $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ systému (20) spĺňajúce začiatočné podmienky

$$y_i(t_0) = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nakoľko vektory $y_1(t_0), y_2(t_0), \ldots, y_n(t_0)$ sú lineárne nezávislé, podľa Vety 4 riešenia $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ sú lineárne nezávislé na $\mathcal{I}$. Preto je priestor riešení systému (20) na intervale $\mathcal{I}$ aspoň n-dimenzionálny. ∎

Fundamentálny systém riešení

Definícia 2 (Fundamentálny systém riešení homogénneho systému)

Ľubovoľná báza priestoru všetkých riešení rovnice (20) na intervale $\mathcal{I}$ sa nazýva fundamentálny systém riešení rovnice (20) na $\mathcal{I}$.

Ak $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ je nejaký fundamentálny systém riešení rovnice (20) na $\mathcal{I}$, potom každé riešenie $y(t)$ systému (20) sa dá vyjadriť v tvare

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{22}$$

pre vhodné konštanty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Naopak, každá lineárna kombinácia riešení $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ je zrejme opäť riešením systému (20) na $\mathcal{I}$. Funkcia $y(t)$ v (22) je preto všeobecným riešením systému (20) na intervale $\mathcal{I}$.

Príklad 7

Uvažujme homogénny systém

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} y$$

na intervale $\mathcal{I} = (0, \infty)$. Dosadením sa ľahko ukáže, že 2-vektorové funkcie

$$y_1(t) = (t, -t)^T, \quad y_2(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)^T$$

sú úplné riešenia tohto systému. Naviac, funkcie $y_1(t)$ a $y_2(t)$ sú podľa Vety 4 lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$, pretože napríklad vektory $y_1(1) = (1, -1)^T$ a $y_2(1) = (1, 1)^T$ sú lineárne nezávislé. Preto v súlade s Definíciou 2 riešenia $y_1(t)$ a $y_2(t)$ tvoria fundamentálny systém riešení danej homogénnej rovnice a jej všeobecné riešenie má potom pre každé $t \in \mathcal{I}$ tvar

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 t + \dfrac{c_2}{t} \\ -c_1 t + \dfrac{c_2}{t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spolu s vektorovou rovnicou (20) sa súčasne uvažuje aj maticová rovnica

$$Y' = A(t)Y, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{23}$$

kde neznáma $Y(t)$ je maticová funkcia rádu n. Ak $Y(t)$ je maticové riešenie rovnice (23) na intervale $\mathcal{I}$ a $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je konštantná matica, potom i funkcia $Y(t)\,C$ je riešením rovnice (23) na $\mathcal{I}$, nakoľko platí

$$[Y(t)\,C]' = Y'(t)\,C = A(t)\,Y(t)\,C = A(t)\,[Y(t)\,C] \quad t \in \mathcal{I}.$$

Podobne, pre každý konštantný vektor $\eta \in \mathbb{R}^n$ je funkcia $Y(t)\,\eta$ riešením vektorovej rovnice (20). Obzvlášť, každý stĺpec matice $Y(t)$ je riešením systému (20). Maticové riešenie $Y(t)$ sa nazýva fundamentálna matica systému (20) (resp. fundamentálne riešenie systému (23)), ak stĺpce matice $Y(t)$ tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (20), t.j., sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$. Riešenie $Y(t)$ rovnice (23) je teda fundamentálne riešenie práve vtedy, keď $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in \mathcal{I}$, t.j., matica $Y(t)$ je regulárna na celom $\mathcal{I}$.

Veta 5 (Liouvilleov-Jacobiho vzorec)

Nech $Y(t)$ *je maticové riešenie rovnice* (23) *na intervale* $\mathcal{I}$ *a nech* $t_0 \in \mathcal{I}$. *Označme* $A(t) = (a_{ij}(t))$. *Potom pre každé* $t \in \mathcal{I}$ *platí vzorec*

$$\det Y(t) = \det Y(t_0)\, \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, \mathrm{d}s\right), \tag{24}$$

kde $\operatorname{Tr} A(s) := a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)$ *je tzv. stopa matice* $A(s)$.

Dôkaz Vety 5 (náčrt).

Využitím definície determinantu štvorcovej matice sa dá ukázať, že funkcia $z(t) = \det Y(t)$ vyhovuje na intervale $\mathcal{I}$ homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici prvého rádu tvaru

$$z' = \operatorname{Tr} A(t)\, z.$$

Riešením tejto rovnice dostaneme pre funkciu $z(t)$ vyjadrenie

$$z(t) = z(t_0)\, \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, \mathrm{d}s\right), \quad t \in \mathcal{I},$$

a teda platí Liouvilleov-Jacobiho vzorec (24). ■

Poznámka 4

Z Liouvilleovho-Jacobiho vzorca vyplýva, že pre každé maticové riešenie $Y(t)$ rovnice (23) platí

$$\text{buď } \det Y(t) \neq 0 \text{ pre každé } t \in \mathcal{I} \text{ alebo } \det Y(t) = 0 \text{ pre každé } t \in \mathcal{I}.$$

Preto funkcia $Y(t)$ je fundamentálnym riešením systému (20) práve vtedy, keď $\det Y(t_0) \neq 0$ aspoň pre jedno $t_0 \in \mathcal{I}$. Následne vektorová funkcia

$$y(t) = Y(t)\, c, \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{25}$$

je všeobecným riešením systému (20) na intervale $\mathcal{I}$. Poznamenajme, že fundamentálna matica systému (20) je určená jednoznačne až na konštantný regulárny násobok sprava. Presnejšie, ak $Y(t)$ je nejaká fundamentálna matica systému (20) na $\mathcal{I}$, potom maticová funkcia $Z(t)$ je fundamentálnou maticou tohto systému práve vtedy, keď na intervale $\mathcal{I}$ platí

$$Z(t) = Y(t)\, C \text{ pre nejakú konštantnú maticu } C \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ s } \det C \neq 0. \tag{26}$$

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. **Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc**
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Nehomogénny systém

Budeme teraz skúmať všeobecný, nehomogénny systém (11), t.j.,

$$x' = A(t)\,x + b(t),$$

kde $A(t)$ je maticová funkcia rádu n a $b(t)$ je n-vektorová funkcia, obidve definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$.

Veta 6 (Štruktúra množiny riešení nehomogénneho systému)

Nech $Y(t)$ je úplné fundamentálne riešenie rovnice $Y' = A(t)\,Y$ a nech $x_0(t)$ je nejaké (partikulárne) riešenie nehomogénneho systému (11) *na $\mathcal{I}$. Potom vektorová funkcia $x(t)$ je úplné riešenie nehomogénneho systému* (11) *na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď pre nejaké $c \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$x(t) = Y(t)\,c + x_0(t) \quad \text{pre každé } t \in \mathcal{I}. \tag{27}$$

Dôkaz Vety 6.

Dosadením do (11) sa ľahko overí, že pre každý konštantný vektor $c \in \mathbb{R}^n$ je funkcia $x(t)$ v (27) riešením rovnice (11) na intervale $\mathcal{I}$, pretože

$$x'(t) = Y'(t)\,c + x_0'(t) = A(t)\,Y(t)\,c + A(t)\,x_0(t) + b(t)$$

$$= A(t)[Y(t)\,c + x_0(t)] + b(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

pre každé $t \in \mathcal{I}$. Naopak, nech $x(t)$ je úplné riešenie systému (11) na $\mathcal{I}$. Potom funkcia $x(t) - x_0(t)$ spĺňa rovnicu (20) na $\mathcal{I}$, nakoľko pre každé $t \in \mathcal{I}$ platí

$$[x(t)-x_0(t)]' = x'(t)-x_0'(t) = A(t)\,x(t)+b(t)-A(t)\,x_0(t)-b(t) = A(t)\,[x(t)-x_0(t)].$$

Podľa rovnosti (25) v Poznámke 4 preto existuje $c \in \mathbb{R}^n$ tak, že funkcia $x(t) - x_0(t) = Y(t)\,c$ na $\mathcal{I}$. Teda riešenie $x(t) = Y(t)\,c + x_0(t)$ má tvar (27). ∎

Poznámka 5

Z Vety 6 vyplýva významné pozorovanie o všeobecnom riešení rovnice (11)

$$\begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{nehom. systému}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{všeobecné riešenie}\\ \text{pridruž. hom. systému}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{partikulárne riešenie}\\ \text{nehom. systému}\end{pmatrix}.$$

Metóda variácie konštánt

Na nájdenie partikulárneho riešenia systému (11) sa využíva metóda variácie konštánt. Nech $x(t)$ je úplné riešenie začiatočnej úlohy (12) na intervale $\mathcal{I}$, t.j.,

$$x' = A(t)\, x + b(t), \quad x(t_0) = \eta,$$

pre dané $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Nech $Y(t)$ je nejaká fundamentálnu matica homogénneho systému (20). Uvažujme vektorovú funkciu $c(t) := Y^{-1}(t)\, x(t)$. Zrejme $c(t)$ je definovaná a diferencovateľná na celom $\mathcal{I}$ a platí

$$x(t) = Y(t)\, c(t), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Po dosadení tohto vyjadrenia riešenia $x(t)$ do (11) a úpravách dostaneme

$$c'(t) = Y^{-1}(t)\, b(t) \quad \Longrightarrow \quad c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Hodnotu $c(t_0)$ určíme pomocou začiatočnej podmienky $x(t_0) = \eta$, konkrétne

$$c(t_0) = Y^{-1}(t_0)\, x(t_0) = Y^{-1}(t_0)\, \eta.$$

Veta 7 (Metóda variácie konštánt)

Začiatočná úloha (12) *má jediné úplné riešenie tvaru*

$$x(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,\eta + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{28}$$

kde $Y(t)$ *je ľubovoľná fundamentálna matica homogénneho systému* (20).

Poznámka 6

Všimnime si, že vo vzorci (28) funkcia $x_H(t) := Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,\eta$ je všeobecné riešenie homogénneho systému (20) spĺňajúce $x_H(t_0) = \eta$, kým funkcia

$$x_P(t) := Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s$$

je partikulárne riešenie rovnice (11) s podmienkou $x_P(t_0) = 0$, ako sa možno presvedčiť dosadením. Platí teda $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ v súlade s Poznámkou 5.

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu

Diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\,y' + p_0(t)\,y = f(t), \tag{29}$$

kde $f(t)$ a $p_i(t)$, $i = 0, \ldots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, sa nazýva lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu. Ak $f(t) \equiv 0$, hovoríme o homogénnej LDR n-tého rádu, v opačnom prípade sa jedná o nehomogénnu rovnicu. Pre nehomogénnu rovnicu (29) sa rovnica

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)\,y' + p_0(t)\,y = 0, \tag{30}$$

označuje ako pridružená homogénna rovnica. Ľavá strana rovnice (29) sa často označuje výrazom $\mathsf{L}y$, kde $\mathsf{L} : \mathcal{C}^n(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}(\mathcal{I})$ je lineárny diferenciálny operátor n-tého rádu. (Úplným) riešením rovnice $\mathsf{L}y = f(t)$ na intervale $\mathcal{I}$ rozumieme funkciu $\psi \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I})$, ktorá identicky spĺňa rovnicu (29) na intervale $\mathcal{I}$. Začiatočnou (Cauchyho) úlohou (problémom) sa označuje sústava

$$\mathsf{L}y = f(t), \quad y(t_0) = \eta_1, \quad y'(t_0) = \eta_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = \eta_n, \tag{31}$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$ je daný bod a $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané reálne konštanty.

Prevod na lineárny systém I

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech $\psi(t)$ je (úplné) riešenie rovnice (29) na intervale $\mathcal{I}$, pričom položme

$$\varphi_1(t) := \psi(t), \quad \varphi_2(t) = \psi'(t), \quad \dots, \quad \varphi_n(t) := \psi^{(n-1)}(t).$$

Potom funkcia $\varphi(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ je (úplným) riešením systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= -p_0(t)\,x_1 - p_1(t)\,x_2 - \cdots - p_{n-1}(t)\,x_n + f(t) \end{aligned} \tag{32}$$

na $\mathcal{I}$. Naopak, pre každé (úplné) riešenie $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ systému (32) *na $\mathcal{I}$ je jeho prvá zložka $\varphi_1(t)$ (úplným) riešením rovnice* (29) *na $\mathcal{I}$.*

Prevod na lineárny systém II

Veta 8 (Prevod na systém)

Nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$. Potom vektorová funkcia $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ je (úplné) riešenie systému (32) spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))^T = \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T$$

práve vtedy, keď jeho prvá zložka $\varphi_1(t)$ je (úplné) riešenie rovnice (29) na $\mathcal{I}$ spĺňajúce začiatočnú podmienku

$$\varphi_1(t_0) = \eta_1, \quad \varphi_1'(t_0) = \eta_2, \quad \dots, \quad \varphi_1^{(n-1)}(t_0) = \eta_n.$$

Systém (32) sa dá prepísať do vektorového tvaru $x' = A(t)\,x + b(t)$, kde

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Existencia a jednoznačnosť riešení

Veta 9 (Existencia a jednoznačnosť riešení)

Nech $f(t)$ a $p_i(t)$, $i = 0, \ldots, n-1$, sú reálne skalárne funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$ a nech $t_0 \in \mathcal{I}$ a $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$ sú dané. Potom začiatočná úloha (31) *má práve jedno úplné riešenie na celom $\mathcal{I}$.*

Príklad 8

Uvažujme LDR 2. rádu na intervale $\mathcal{I} = (\mathrm{e}, \infty)$ a začiatočnú podmienku

$$y'' + \frac{1}{t(1-\ln t)}\, y' - \frac{1}{t^2(1-\ln t)}\, y = \frac{2-\ln t}{t(1-\ln t)}, \qquad y(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2, \quad y'(\mathrm{e}^2) = 2.$$

Keďže koeficienty a pravá strana rovnice sú funkcie definované a spojité na intervale $\mathcal{I}$, podľa Vety 9 má daná začiatočná úloha práve jedno úplné riešenie definované na celom intervale $\mathcal{I}$. Dá sa ukázať, že toto riešenie má tvar

$$y(t) = t\ln t - t, \quad t \in (\mathrm{e}, \infty).$$

Obsah

1. Obyčajné diferenciálne rovnice prvého rádu – opakovanie
2. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc
3. Homogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
4. Nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc
5. Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov
6. Systémy s konštantnými koeficientami

Systémy s konštantnými koeficientami

Z predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že na úplné určenie množiny všetkých riešení (všeobecného riešenia) systému lineárnych diferenciálnych rovníc I. rádu je nutné a zároveň stačí poznať nejakú fundamentálnu maticu pridruženého homogénneho systému. Vo všeobecnom prípade je to veľmi náročný problém. Budeme sa bližšie zaoberať prípadom homogénneho systému s konštantnými koeficientami, t.j. systémom

$$y' = Ay, \tag{33}$$

kde A je konštantná reálna matica rádu n. Každé riešenie systému (33) je definované na intervale $(-\infty, \infty)$. Ukážeme, že pre systém (33) je možné pomerne efektívne určiť všetky jeho fundamentálne riešenia $Y(t)$, t.j., maticové funkcie Y rádu n spĺňajúce $Y'(t) = AY(t)$ a $\det Y(t) \neq 0$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$.

Exponenciála matice

Nech M je komplexná matica rádu n. Matica definovaná

$$\mathrm{e}^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k = I + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \cdots + \frac{1}{k!} M^k + \cdots \qquad (34)$$

sa nazýva exponenciála matice M. Nekonečný rad v (34) konverguje absolútne pre každú maticu M, a teda matica e^M je korektne definovaná pre každé M.

Poznámka 7 (Základné vlastnosti exponenciály matice)

Nech M, N sú komplexné matice rádu n. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

- $\mathrm{e}^0 = I$.
- $\mathrm{e}^M \mathrm{e}^{-M} = I$, t.j., matica e^M je regulárna a $\left(\mathrm{e}^M\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-M}$.
- Ak $MN = NM$, potom $\mathrm{e}^M \mathrm{e}^N = \mathrm{e}^N \mathrm{e}^M = \mathrm{e}^{M+N}$.
- Ak N je regulárna, potom $\mathrm{e}^{NMN^{-1}} = N\mathrm{e}^M N^{-1}$.

Exponenciála matice ako fundamentálne riešenie

Veta 10

Nech A je reálna konštantná matica rádu n. Potom exponenciála e^{At} je fundamentálna matica homogénneho systému (33) na $(-\infty, \infty)$.

Dôkaz Vety 10.

Maticová funkcia $Y(t) = \mathrm{e}^{At}$ je maticovým riešením systému (33), nakoľko

$$Y'(t) = \left(\mathrm{e}^{At}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(At)^k\right)' = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(At)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}\,A^k t^{k-1}$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\,A^{k-1} t^{k-1} \overset{(l=k-1)}{=} A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\,(At)^l = A\,\mathrm{e}^{At} = AY(t).$$

Okrem toho $Y(0) = I$ v súlade s Poznámkou 7. Preto podľa Liouvilleovho-Jacobiho vzorca (24) je matica $Y(t)$ regulárna na celom intervale $(-\infty, \infty)$. Teda $Y(t)$ je fundamentálna matica systému (33) na intervale $(-\infty, \infty)$. ∎

Jordanov kanonický tvar matice

Veta 11 (Jordanova)

Pre každú komplexnú maticu M rádu n existuje regulárna matica P tak, že

$$P^{-1}MP = Q = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Pritom matice $J_0 \in \mathbb{C}^{q\times q}$ a $J_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}$ pre $i = 1, \dots, m$ majú tvar

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_q \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

kde λ_j, $j = 1, \dots, q+m$, sú (nie nutne rôzne) vlastné čísla matice M a platí $q + n_1 + \cdots + n_m = n$.

Matice J_i, $i = 0, \ldots, m$, sa nazývajú Jordanove bloky (bunky, klietky) matice M a stĺpce matice P sa nazývajú zovšeobecnené vlastné vektory matice M. Blokovo diagonálna matica

$$Q = \begin{pmatrix} J_0 & O & \cdots & O \\ O & J_1 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{pmatrix} \tag{37}$$

v Jordanovom rozklade (35) je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov. Matica P nie je určená jednoznačne. Medzi stĺpcami matice P a Jordanovými blokmi matice Q platí nasledujúca korešpondencia.

Stĺpce $h_1, \ldots, h_q$ sú vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastným číslam $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

Stĺpce $h_{q+n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \ldots, h_{q+n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i}$ sú zovšeobecnené vlastné vektory matice M odpovedajúce vlastnému číslu λ_{q+i} v bloku J_i pre $i = 1, \ldots, m$.

Výpočet fundamentálnej matice

Stanovíme teraz fundamentálnu maticu systému (33) ako vhodný pravostranný regulárny násobok exponenciály e^{At}. Nech $t \in (-\infty, \infty)$. Ak P a Q sú matice z Vety 11 odpovedajúce Jordanovmu rozkladu matice A, t.j., $A = PQP^{-1}$, potom podľa Poznámky 7 platí

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{P(Qt)P^{-1}} = P\mathrm{e}^{Qt}P^{-1}, \quad \text{teda} \quad \mathrm{e}^{At}P = P\mathrm{e}^{Qt}. \tag{38}$$

Z tvaru matice Q a z definície exponenciály matice vyplýva

$$\mathrm{e}^{Qt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_0 t} & O & \cdots & O \\ O & \mathrm{e}^{J_1 t} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & \cdots & \mathrm{e}^{J_m t} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Pre exponenciálu Jordanovho bloku $J_0 t$ platí

$$\mathrm{e}^{J_0 t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_q t} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Výpočet fundamentálnej matice

Blok $J_i t$, $i = 1, \dots, m$, má tvar $J_i t = (\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t$, kde I_i je identická matica rádu n_i a

$$M_i t = \begin{pmatrix} 0 & t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Matice $(\lambda_{q+i} t) I_i$ a $M_i t$ komutujú, preto podľa Poznámky 7 platí

$$\mathrm{e}^{J_i t} = \mathrm{e}^{(\lambda_{q+i} t) I_i + M_i t} = \mathrm{e}^{\lambda_{q+i} t} \mathrm{e}^{M_i t}. \tag{42}$$

Postupným počítaním mocnín $(M_i t)^k$ pre $k = 0, 1, \dots$ zistíme, že $(M_i t)^k = 0$ pre každé $k \geq n_i$, a teda

$$\mathrm{e}^{M_i t} = \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{1}{k!} (M_i t)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Výpočet fundamentálnej matice

Kombináciou formúl (42) a (43) dostaneme tvar exponenciály bloku $J_i t$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{q+i} t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

a tým i – využitím vyjadrení v (39) a (40) – exponenciálu matice Qt. Podľa Poznámky 4 je matica $e^{At}P$ fundamentálnou maticou systému (33). Označme

$$P = [h_1, \ldots, h_n] \quad \text{a} \quad e^{At}P = [y_1(t), \ldots, y_n(t)].$$

Rovnosť (38) a predchádzajúca analýza implikujú nasledujúce tvrdenie.

Fundamentálny systém riešení

Veta 12 (Fundamentálny systém riešení)

Vektorové funkcie

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t} h_1 \\
&\vdots \\
y_q(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_q t} h_q \\
y_{q+1}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} h_{q+1} \\
y_{q+2}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left[t h_{q+1} + h_{q+2}\right] \\
&\vdots \\
y_{q+n_1}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+1} t} \left[\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} h_{q+1} + \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!} h_{q+2} + \cdots + h_{q+n_1}\right] \\
&\vdots \\
y_n(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_{q+m} t} \left[\frac{t^{n_m-1}}{(n_m-1)!} h_{n-n_m+1} + \frac{t^{n_m-2}}{(n_m-2)!} h_{n-n_m+2} + \cdots + h_n\right],
\end{aligned}
\tag{45}
$$

tvoria fundamentálny systém riešení rovnice (33) *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Môžeme preto konštatovať, že zložky vektorových riešení fundamentálneho systému majú podľa Vety 12 tvar kvázipolynómov, t.j.,

$$p_k(t)\,\mathrm{e}^{\lambda_k t},$$

kde λ_k je vlastné číslo matice A a $p_k(t)$ sú (komplexné) polynómy premennej t stupňa menšieho ako je algebraická násobnosť vlastného čísla λ_k. Keďže matica A je reálna, s každým nereálnym vlastným číslom $\alpha + \mathrm{i}\beta$ má aj komplexne združené vlastné číslo $\alpha - \mathrm{i}\beta$. Vo fundamentálnom systéme (45) sa teda s každým nereálnym riešením y nachádza aj komplexne združené riešenie $\bar{y}$. Nakoľko platí

$$\mathrm{Re}\, y = \frac{1}{2}\,(y + \bar{y}) \quad \text{a} \quad \mathrm{Im}\, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(y - \bar{y}),$$

reálne vektorové funkcie $\mathrm{Re}\, y$ a $\mathrm{Im}\, y$ sú tiež lineárne nezávislými riešeniami rovnice (33). Preto každú nereálnu dvojicu riešení y a $\bar{y}$ môžeme nahradiť reálnou dvojicou riešení $\mathrm{Re}\, y$ a $\mathrm{Im}\, y$. Tým získame reálny fundamentálny systém vektorových riešení, pričom zložky jednotlivých riešení budú mať tvar

$$\{p_k(t)\,\cos\left[(\mathrm{Im}\,\lambda_k)\,t\right] + q_k(t)\,\sin\left[(\mathrm{Im}\,\lambda_k)\,t\right]\}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)\,t},$$

kde $p_k(t)$ a $q_k(t)$ sú už reálne polynómy premennej t stupňa menšieho než je algebraická násobnosť vlastného čísla λ_k.

Príklad 9

Určime nejakú fundamentálnu maticu systému

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Podľa Vety 10 stačí nájsť exponenciálu matice At. Matica A systému má už v Jordanov blokový tvar

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

pričom má jednoduché vlastné číslo 2 a štvornásobné vlastné číslo -1.

Príklad 9

Exponenciála e^{At} má preto tvar

$$Y(t) = \mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} & \frac{t^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Poznamenajme, že získaná fundamentálna matica $Y(t)$ rovnice v zadaní príkladu je normovaná v bode $t_0 = 0$, t.j., platí $Y(0) = I$. Fundamentálna matica $Z(t)$ normovaná napríklad v bode $t_0 = 3$, t.j., $Z(3) = I$, má tvar

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2(t-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & (t-3)\,\mathrm{e}^{-(t-3)} & \frac{(t-3)^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} & (t-3)\,\mathrm{e}^{-(t-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-3)} \end{pmatrix}.$$

Príklad 10

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Zistíme vlastné čísla matice A systému. Jej charakteristický polynóm má tvar

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Matica A má teda jednoduché vlastné číslo 2 a dvojnásobné vlastné číslo 1. Vlastnému číslu 2 odpovedá jedno lineárne nezávislé riešenie tvaru

$$x(t) = \left(a\, \mathrm{e}^{2t},\ b\, \mathrm{e}^{2t},\ c\, \mathrm{e}^{2t}\right)^T,$$

kde a, b, c sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní príkladu dostaneme po úpravách pre a, b, c sústavu troch lineárnych rovníc

$$2a = a - b + c, \quad 2b = a + b - c, \quad 2c = -b + 2c.$$

Táto sústava má jedno lineárne nezávislé riešenie $a = c = 1$ a $b = 0$.

Príklad 10

Vlastnému číslu 1 odpovedajú dve lineárne nezávislé riešenia tvaru

$$x(t) = \begin{pmatrix} (at+b)\,\mathrm{e}^t \\ (ct+d)\,\mathrm{e}^t \\ (ft+g)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, f, g sú konštanty. Dosadením tohto riešenia do systému v zadaní príkladu dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned} a + (at+b) &= (at+b) - (ct+d) + (ft+g), \\ c + (ct+d) &= (at+b) + (ct+d) - (ft+g), \\ f + (ft+g) &= -(ct+d) + 2(ft+g). \end{aligned}$$

Ak porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách premennej t na oboch stranách týchto rovností, získame 4 nezávislé rovnice pre a, b, c, d, f, g, a to

$$f - c = 0, \quad a - f = 0, \quad a = g - d, \quad c = b - g.$$

Táto sústava má dve lineárne nezávislé riešenia

$$a = c = f = 0, \quad b = d = g = 1 \quad \text{a} \quad a = b = c = f = 1, \quad d = -1, \quad g = 0.$$

Príklad 10

Zostrojili sme teda tri lineárne nezávislé vektorové riešenia rovnice v zadaní príkladu. Jej fundamentálny systém riešení preto je

$$\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{t} \\ (t-1)\,e^{t} \\ t\,e^{t} \end{pmatrix}.$$

Všeobecné riešenie systému v zadaní má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (t+1)\,e^{t} \\ (t-1)\,e^{t} \\ t\,e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 (t+1)\,e^{t} \\ c_2 e^{t} + c_3 (t-1)\,e^{t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + c_3 t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

pre $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Pre úplnosť poznamenajme, že matica

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} & (t+1)\,e^{t} \\ 0 & e^{t} & (t-1)\,e^{t} \\ e^{2t} & e^{t} & t\,e^{t} \end{pmatrix}$$

je fundamentálnou maticou systému v zadaní príkladu na intervale $(-\infty, \infty)$.

Príklad 11

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica A systému má jednoduché reálne vlastné číslo 1 a dvojicu jednoduchých nereálnych vlastných čísiel $1 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentálny systém rovnice v zadaní príkladu je preto tvorený tromi lineárne nezávislými vektorovými riešeniami tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1\, \mathrm{e}^{t} \\ a_2\, \mathrm{e}^{t} \\ a_3\, \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1\, \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ b_2\, \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ b_3\, \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1\, \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ c_2\, \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ c_3\, \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix},$$

kde a_i, b_i, c_i pre $i = 1, 2, 3$ sú vo všeobecnosti komplexné konštanty. Podobným postupom ako v predchádzajúcom príklade zistíme riešenia

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \\ 3\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \\ 3\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\,t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 11

Získaný fundamentálny systém riešení je nereálny. Nahradením posledných dvoch nereálnych vektorových funkcií ich reálnymi a imaginárnymi časťami dostaneme reálny fundamentálny systém riešení

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^t \sin 2t \\ \mathrm{e}^t \cos 2t \\ 3\mathrm{e}^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \cos 2t \\ \mathrm{e}^t \sin 2t \\ 3\mathrm{e}^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Pri výpočte sme využili Eulerovu identitu

$$\mathrm{e}^{(1\pm 2\mathrm{i})\,t} = \mathrm{e}^t(\cos 2t \pm \mathrm{i}\sin 2t).$$

Príslušná fundamentálna matica $Y(t)$ systému v zadaní príkladu má potom pre každé $t \in (-\infty, \infty)$ tvar

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{e}^t \cos 2t & 2\mathrm{e}^t \cos 2t \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \cos 2t & \mathrm{e}^t \sin 2t \\ -\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t \cos 2t & 3\mathrm{e}^t \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Metóda vlastných vektorov

Nasledujúci spôsob výpočtu fundamentálneho systému riešení rovnice (33) je založený na tomto pozorovaní. Ak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo matice A a $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ je k nemu prislúchajúci vlastný vektor matice A, t.j., platí

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)\, v = 0,$$

potom n-vektorová funkcia $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ je (komplexným) riešením systému (33) na $(-\infty, \infty)$. Vyplýva to z nasledujúceho jednoduchého výpočtu

$$x'(t) = \left(\mathrm{e}^{\lambda t} v\right)' = \mathrm{e}^{\lambda t} \lambda\, v = \mathrm{e}^{\lambda t} A v = A\left(\mathrm{e}^{\lambda t} v\right) = A x(t).$$

Poznámka 8

- Lineárne nezávislým vlastným vektorom matice A, ktoré prislúchajú rovnakému vlastnému číslu, odpovedajú lineárne nezávislé riešenia systému.
- Lineárne nezávislým vlastným vektorom matice A, ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam, odpovedajú lineárne nezávislé riešenia systému.

Násobnosť vlastného čísla λ matice A ako koreňa charakteristického polynómu matice A sa nazýva algebraická násobnosť vlastného čísla λ a označuje sa $m(\lambda)$. Maximálny počet lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A, ktoré prislúchajú danému vlastnému číslu λ, sa nazýva geometrická násobnosť vlastného čísla λ a označuje sa $p(\lambda)$. Vo všeobecnosti platí nerovnosť

$$1 \leq p(\lambda) \leq m(\lambda). \tag{46}$$

V prípade, ak $p(\lambda) < m(\lambda)$, vlastné číslo λ sa označuje ako defektné. V opačnom prípade, t.j., ak $p(\lambda) = m(\lambda)$, hovoríme o nedefektnom vlastnom čísle λ matice A. Ak $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sú všetky rôzne vlastné čísla matice A, potom platí

$$m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_r) = n.$$

Hľadanie fundamentálneho systému riešení rovnice (33), ktorej matica A má iba nedefektné vlastné čísla, sa teda redukuje na zisťovanie všetkých lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A. Ich počet je v tomto prípade práve n.

Príklad 12

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A systému má dve jednoduché vlastné čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 3$, pretože $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 3)$. Číslu $\lambda_1 = 0$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_1 = (2, 1)^T$, a následne i riešenie rovnice v zadaní príkladu tvaru

$$\mathrm{e}^{0t}(2,\ 1)^T = (2,\ 1)^T.$$

Podobne, vlastnému číslu $\lambda_2 = 3$ odpovedá jeden lineárne nezávislý vlastný vektor $v_2 = (1, -1)^T$ a riešenie tvaru

$$\mathrm{e}^{3t}(1,\ -1)^T = (\mathrm{e}^{3t},\ -\mathrm{e}^{3t})^T.$$

Všeobecné riešenie rovnice v zadaní príkladu má potom na $(-\infty, \infty)$ tvar

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2\mathrm{e}^{3t} \\ c_1 - c_2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Zovšeobecnené vlastné vektory

Ak matica A má aspoň jedno defektné vlastné číslo, potom maximálny počet jej lineáne nezávislých vlastných vektorov je ostro menší než n. Postupom použitým v predchádzajúcom príklade teda nezískame úplný fundamentálny systém riešení rovnice (33). Chýbajúce lineárne nezávislé riešenia zostrojíme pomocou tzv. zovšeobecnených vlastných vektorov matice A.

Definícia 3 (Zovšeobecnené vlastné vektory)

Nech A je komplexná matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo. Pre dané $r \in \mathbb{N}$ sa vektor $v_r \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ nazýva zovšeobecnený vlastný vektor rádu r matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ, ak platí

$$(A - \lambda I)^r v_r = 0 \quad \text{a súčasne} \quad (A - \lambda I)^{r-1} v_r \neq 0. \tag{47}$$

Ak v_r je zovšeobecnený vlastný vektor rádu r matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ, potom konečná postupnosť vektorov $v_1, v_2, \cdots, v_r$ definovaných ako

$$v_1 = (A - \lambda I)^{r-1} v_r, \quad v_2 = (A - \lambda I)^{r-2} v_r, \quad \cdots, \quad v_{r-1} = (A - \lambda I)\, v_r, \quad v_r,$$

sa nazýva reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov generovaný v_r.

Každý vektor $v_p = (A - \lambda I)^{r-p} v_r$, $1 \leq p \leq r$, obsiahnutý v reťazci tvorenom vektorom v_r je zovšeobecnený vlastný vektor rádu p matice A prislúchajúci vlastnému číslu λ, nakoľko platí

$$(A - \lambda I)^p v_p = (A - \lambda I)^p (A - \lambda I)^{r-p} v_r = (A - \lambda I)^r v_r = 0,$$

$$(A - \lambda I)^{p-1} v_p = (A - \lambda I)^{p-1} (A - \lambda I)^{r-p} v_r = (A - \lambda I)^{r-1} v_r \neq 0.$$

Postupnosť $v_1, v_2, \cdots, v_p$ je potom (pod)reťazec rádu p zovšeobecnených vlastných vektorov generovaný vektorom v_p.

Veta 13

Pre každú komplexnú maticu A rádu n platia nasledujúce tvrdenia.

1. *Každý reťazec matice A je tvorený lineárne nezávislými vektormi.*
2. *Reťazce matice A generované lineárne nezávislými zovšeobecnenými vlastnými vektormi, ktoré prislúchajú jednému vlastnému číslu, sú lineárne nezávislé.*
3. *Reťazce matice A generované zovšeobecnenými vlastnými vektormi, ktoré prislúchajú rôznym vlastným číslam, sú lineárne nezávislé.*

Fundamentálny systém riešení

Veta 14

Nech A je komplexná matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo. Nech $v_1, v_2, \cdots, v_r$ je nejaký reťazec rádu r zovšeobecnených vlastných vektorov matice A odpovedajúci vlastnému číslu λ. Potom vektorové funkcie

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t} v_1, \\
x_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}(v_2 + t v_1), \\
&\vdots \\
x_p(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_p + t v_{p-1} + \frac{t^2}{2!} v_{p-2} + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} v_1\right), \qquad (48) \\
&\vdots \\
x_r(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_r + t v_{r-1} + \frac{t^2}{2!} v_{r-2} + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} v_1\right),
\end{aligned}
$$

sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (33) *na intervale* $(-\infty, \infty)$.

Veta 15

Nech A je komplexná matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je jej vlastné číslo s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. Potom existuje práve $m(\lambda)$ lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov matice A prislúchajúcich vlastnému číslu λ. Tieto vektory sa dajú vhodne rozdeliť do navzájom disjunktných reťazcov.

Dôsledkom Viet 13, 14 a 15 je skutočnosť, že každá komplexná matica A rádu n má práve n lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov, pomocou ktorých vieme podľa (48) zostrojiť úplný fundamentálny systém rovnice (33). V nasledujúcom výklade sa preto zameriame na jednu metódu konštrukcie všetkých lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov (komplexnej) matice A.

Weyrova teória charakteristických čísiel matice

Nech A je matica rádu n a nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo matice A s algebraickou násobnosťou $m(\lambda)$. Uvažujme nasledujúcu postupnosť matíc

$$(A-\lambda I)^0 = I, \quad (A-\lambda I)^1 = A - \lambda I, \quad (A-\lambda I)^2, \quad \cdots, \quad (A-\lambda I)^l, \quad \cdots,$$

a k nej prislúchajúcu postupnosť ich hodností

$$n = h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad \cdots, \quad h_l, \quad \cdots. \tag{49}$$

Pomocou Jordanovho rozkladu vo Vete 11 sa dá ukázať, že postupnosť (49) je ostro klesajúca s eventuálnou hodnotou $n - m(\lambda)$, t.j., existuje najmenší index k taký, že platí

$$n = h_0 > h_1 > h_2 > \cdots > h_{k-1} > h_k = n - m(\lambda) \tag{50}$$

a $h_l = n - m(\lambda)$ pre každé $l \geq k$. To znamená, že nulity $\nu_l := n - h_l$ matíc $(A-\lambda I)^l$ (t.j., dimenzie jadier matíc $(A-\lambda I)^l$) pre $l = 0, \ldots, k$ spĺňajú

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{k-1} < \nu_k = m(\lambda). \tag{51}$$

Prirodzené čísla σ_l definované

$$\sigma_l := \nu_l - \nu_{l-1}, \quad l = 1, \ldots, k, \tag{52}$$

sa nazývajú Weyrove charakteristiky (charakteristické čísla) matice A prislúchajúce vlastnému číslu λ. Z (52) ihneď vyplýva, že číslo σ_l vyjadruje celkový počet lineárne nezávislých reťazcov rádu l zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, odpovedajúcich vlastnému číslu λ. A keďže všetky takéto reťazce obsahujú podreťazce rádu $l-1$, ktoré sú opäť lineárne nezávislé, máme $\sigma_{l-1} \geq \sigma_l$ pre každé $l = 1, \ldots, k$. Platí teda

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{k-1} \geq \sigma_k > 0, \tag{53}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_{k-1} + \sigma_k = \nu_k - \nu_0 = m(\lambda). \tag{54}$$

Poznamenajme, že rovnosť (54) ako aj vyššie uvedené skutočnosti sú v súlade s výsledkom Vety 15. Lineárne nezávislé zovšeobecnené vlastné vektory matice A odpovedajúce vlastnému číslu λ sa dajú vhodne usporiadať do tzv. Weyrovej tabuľky, ktorej stĺpce predstavujú jednotlivé lineárne nezávislé reťazce a riadky obsahujú lineárne nezávislé zovšeobecnené vlastné vektory rovnakého rádu.

Tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$\cdots$	v_{1,σ_k}	$\cdots$	v_{1,σ_3}	$\cdots$	v_{1,σ_2}	$\cdots$	v_{1,σ_1}
$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$v_{2,3}$	$\cdots$	v_{2,σ_k}	$\cdots$	v_{2,σ_3}	$\cdots$	v_{2,σ_2}		
$v_{3,1}$	$v_{3,2}$	$v_{3,3}$	$\cdots$	v_{3,σ_k}	$\cdots$	v_{3,σ_3}				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$						
$v_{k,1}$	$v_{k,2}$	$v_{k,3}$	$\cdots$	v_{k,σ_k}						

(55)

Pri zostavovaní Weyrovej tabuľky zovšeobecnených vlastných vektorov určíme najprv najspodnejšie vektory v každom stĺpci, t.j., vektory

$$\begin{gathered}
v_{k,1},\ \cdots,\ v_{k,\sigma_k},\\
v_{k-1,\sigma_k+1},\ \cdots,\ v_{k-1,\sigma_{k-1}},\\
\vdots\\
v_{l,\sigma_{l+1}+1},\ \cdots,\ v_{l,\sigma_l},\\
\vdots\\
v_{2,\sigma_3+1},\ \cdots,\ v_{2,\sigma_2},\\
v_{1,\sigma_2+1},\ \cdots,\ v_{1,\sigma_1}.
\end{gathered} \tag{56}$$

Napríklad posledných $\sigma_l - \sigma_{l+1}$ vektorov $v_{l,\sigma_{l+1}+1}, \cdots, v_{l,\sigma_l}$ v l-tom riadku tabuľky stanovíme ako niektoré lineárne nezávislé riešenia sústavy

$$(A - \lambda I)^l v = 0, \quad (A - \lambda I)^{l-1} v \neq 0.$$

Postupným násobením vektorov v (56) mocninami matice $A - \lambda I$ dostaneme ostatné vektory Weyrovej tabuľky (55). Jednotlivé vektory v (56) volíme tak, aby všetky postupne vznikajúce vektory tabuľky boli lineárne nezávislé. Postup ilustrujeme na konkrétnych príkladoch. Poznamenajme, že sústava lineárne nezávislých zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, ktoré odpovedajú danému vlastnému číslu λ, nie je určená jednoznačne, avšak pre konštrukciu úplného fundamentálneho systému riešení rovnice (33) podľa Vety 14 nezáleží na jej konkrétnom výbere.

Príklad 13

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má dve dvojnásobné vlastné čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 2)^2.$$

Pre $\lambda_1 = 3$ je teda $m = 2$, $n - m = 4 - 2 = 2$ a $h_0 = n = 4$. Ďalej máme

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí $h_1 = 3$ a $h_2 = 2$, a teda index $k = 2$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2,$$

Príklad 13

ktorá dáva dve Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 1$ a $\sigma_2 = \nu_2 - \nu_1 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastné číslo $\lambda_1 = 3$ bude teda mať $k = 2$ riadky, pričom v prvom riadku bude $\sigma_1 = 1$ vektor a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor

$$\boxed{\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{array}}.$$

Vektor $v_{2,1}$ spĺňa $(A - 3I)^2 v_{2,1} = 0$ a $(A - 3I)\, v_{2,1} \neq 0$, teda napríklad

$$v_{2,1} = (0,\ 4,\ 1,\ -2)^T.$$

Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A - 3I)\, v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1,\ -1,\ -1,\ 3)^T$. Vlastnému číslu λ_1 teda odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{3t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{3t} \\ -(t-4)\,\mathrm{e}^{3t} \\ -(t-1)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (3t-2)\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 13

Podobne pre $\lambda_2 = 2$ je $m = 2$, $n - m = 4 - 2 = 2$ a $h_0 = n = 4$. Ďalej máme

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí $h_1 = 2$, a teda index $k = 1$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2,$$

ktorá dáva jednu Weyrovu charakteristiku $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastné číslo $\lambda_2 = 2$ bude teda mať $k = 1$ riadok s $\sigma_1 = 2$ vektormi

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$

.

Vektory $v_{1,1}$ a $v_{1,2}$ spĺňajú $(A - 2I)\,v_{1,1} = 0 = (A - 2I)\,v_{1,2}$ a $v_{1,1} \neq 0$, $v_{1,2} \neq 0$. Sú to teda lineárne nezávislé vlastné vektory odpovedajúce vlastnému číslu $\lambda_2 = 2$. Výpočtom napríklad dostaneme

Príklad 13

$$v_{1,1} = (0,\ 1,\ 0,\ 0)^T, \quad v_{1,2} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T.$$

Vlastnému číslu λ_2 teda odpovedajú dve lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Napokon fundamentálna matica systému v zadaní príkladu má tvar

$$Y(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\mathrm{e}^{3t} & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^{3t} & -(t-4)\,\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ -\mathrm{e}^{3t} & -(t-1)\,\mathrm{e}^{3t} & 0 & 0 \\ 3\mathrm{e}^{3t} & (3t-2)\,\mathrm{e}^{3t} & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 14

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má jedno trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 2$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3.$$

Teda $m = 3$, $n - m = 3 - 3 = 0$ a $h_0 = n = 3$. Ďalej máme

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^3 = 0.$$

Platí $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0$, a teda index $k = 3$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 1 < \nu_2 = 2 < \nu_3 = 3,$$

ktorá dáva tri Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$ a $\sigma_3 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov bude teda mať $k = 3$ riadky,

Príklad 14

pričom v každom z nich bude jeden vektor

$$\boxed{\begin{array}{c} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{array}}.$$

Vektor $v_{3,1}$ spĺňa $(A-2I)^3 v_{3,1} = 0$ a $(A-2I)^2 v_{3,1} \neq 0$, teda napríklad $v_{3,1} = (0,\, 0,\, 1)^T$. Pre vektor $v_{2,1}$ potom platí $v_{2,1} = (A-2I)\, v_{3,1}$, teda $v_{2,1} = (0,\, -1,\, -1)^T$, a pre vektor $v_{1,1}$ platí $v_{1,1} = (A-2I)^2 v_{3,1}$, teda $v_{1,1} = (1,\, 2,\, 1)^T$. Danému vlastnému číslu teda odpovedajú tri lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^{2t} \\ (2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ (t-1)\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_{3,1} + t v_{2,1} + \frac{t^2}{2}\, v_{1,1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{2t} \\ (t^2 - t)\,\mathrm{e}^{2t} \\ \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 14

Fundamentálna matica systému v zadaní príkladu má potom tvar

$$Y(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}\,e^{2t} \\ 2e^{2t} & (2t-1)\,e^{2t} & (t^2-t)\,e^{2t} \\ e^{2t} & (t-1)\,e^{2t} & \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Príklad 15

Uvažujme systém

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Matica A má jedno trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 1$, nakoľko

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3.$$

Teda $m = 3$, $n - m = 3 - 3 = 0$ a $h_0 = n = 3$. Ďalej máme

Príklad 15

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A-I)^2 = 0.$$

Platí $h_1 = 1$ a $h_2 = 0$, a teda index $k = 2$. Príslušná postupnosť nulít je

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 = 2 < \nu_2 = 3,$$

ktorá dáva dve Weyrove charakteristiky $\sigma_1 = 2$ a $\sigma_2 = 1$. Weyrova tabuľka zovšeobecnených vlastných vektorov bude teda mať $k = 2$ riadky, pričom v prvom riadku budú $\sigma_1 = 2$ vektory a v druhom riadku bude $\sigma_2 = 1$ vektor

$v_{1,1}$	$v_{1,2}$
$v_{2,1}$	

.

Vektor $v_{2,1}$ spĺňa $(A-I)^2 v_{2,1} = 0$, $(A-I)\, v_{2,1} \neq 0$, napr. $v_{2,1} = (1,\, 1,\, -1)^T$. Pre vektor $v_{1,1}$ potom platí $v_{1,1} = (A-I)\, v_{2,1}$, teda $v_{1,1} = (1,\, 2,\, -1)^T$. Vektor $v_{1,2}$ je vlastný vektor, t.j., $(A-I)\, v_{1,2} = 0$, lineárne nezávislý s $v_{1,1}$ a $v_{2,1}$. Takýmto vektorom je napríklad $v_{1,2} = (0,\, 1,\, -1)^T$.

Príklad 15

Vlastnému číslu $\lambda = 1$ teda odpovedajú tri lineárne nezávislé vektorové riešenia

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_{2,1} + t v_{1,1}) = \begin{pmatrix} (t+1)\,\mathrm{e}^t \\ (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ -(t+1)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$x_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Príslušná fundamentálna matica rovnice v zadaní príkladu má potom tvar

$$Y(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & (t+1)\,\mathrm{e}^t & 0 \\ 2\mathrm{e}^t & (2t+1)\,\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t & -(t+1)\,\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$