

# Diskrétní matematika – 10. týden

## Vytvořující funkce

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

podzim 2020

# Obsah přednášky

- 1 Vytvořující funkce
- 2 (Formální) mocninné řady
  - Přehled mocninných řad
- 3 Operace s vytvořujícími funkcemi

## Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant  
**Matematika drsně a svižně**, e-text na  
[www.math.muni.cz/Matematika\\_drsne\\_svizne](http://www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne).
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,  
**Concrete Mathematics**, Addison-Wesley, 1994.

# Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

## Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla  $i$ ,  $j$  a  $k$  taková, že  $i + j + k = 22$  a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u  $x^{22}$  ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři**

**možnosti**  $3 * 5 + 3 * 2 + 1 * 1$ ,  $3 * 5 + 2 * 2 + 3 * 1$ ,  
 $2 * 5 + 5 * 2 + 2 * 1$  a  $2 * 5 + 4 * 2 + 4 * 1$ .

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla  $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$  a  $a_{50}$  taková, že  $a_i$  je násobkem  $i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  a zároveň  $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$ . Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u  $x^{100}$  v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \\ (1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

## Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

## Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u  $x^7$  v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^5)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^{15}).$$

Když máme předepsaný nějaký počet jako nejmenší možný, prostě začneme až od příslušných mocnin.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějších. Využijeme přitom **binomickou větu**.

### Věta (binomická)

Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Na pravou stranu se můžeme dívat jako na součin  $n$  polynomů, levá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením. Dosazením čísel  $x = 1$ , resp.  $x = -1$  dostáváme známé vzorce:

### Důsledek

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

### Důsledek

*Platí*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

### Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme  $n(1+x)^{n-1}$ , derivací pravé strany (člen po členu) pak  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ . Dosazením  $x = 1$  dostaneme tvrzení. □



# (Formální) mocninné řady

## Definice

Bud' dána nekonečná posloupnost  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ . Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

## Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninných řad k příslušným funkcím.

## Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ . Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro  $x \in (-1, 1)$  a její součet je roven funkci  $1/(1 - x)$ . Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci, ...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro  $k$ -tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo alespoň asymptotické chování.

# Dosazování do mocninných řad

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

## Věta

*Bud'  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké  $R \in \mathbb{R}$ , že pro všechna  $k \gg 0$  je  $|a_k| \leq R^k$ , pak řada*

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

*konverguje pro každé  $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$ . Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž  $a(x)$ . Hodnotami funkce  $a(x)$  na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má  $a(x)$  v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

## Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k,$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k},$$

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

## Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro  $r \in \mathbb{R}$  je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe  $\binom{r}{0} = 1$ .

- Pro  $n \in \mathbb{N}$  z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání  $(a_i + b_i)$  posloupností člen po členu odpovídá součet  $a(x) + b(x)$  příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení  $(\alpha \cdot a_i)$  všech členů posloupnosti stejným skalárem  $\alpha$  odpovídá vynásobení  $\alpha \cdot a(x)$  příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce  $a(x)$  monomem  $x^k$  odpovídá posunutí posloupnosti doprava o  $k$  míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o  $k$  míst (tj. vynechání prvních  $k$  míst posloupnosti) nejprve od  $a(x)$  odečteme polynom  $b_k(x)$  odpovídají posloupnosti  $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$  a poté podělíme vytvořující funkci  $x^k$ .

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle  $x$ : funkce  $a'(x)$  vytvořuje posloupnost  $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ , člen s indexem  $k$  je  $(k+1)a_{k+1}$  (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrovaní: funkce  $\int_0^x a(t) dt$  vytvořuje posloupnost  $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$ , pro  $k \geq 1$  je člen s indexem  $k$  roven  $\frac{1}{k}a_{k-1}$  (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce  $a(x)$ ).
- Násobení řad: součin  $a(x)b(x)$  je vytvořující funkcí posloupnosti  $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ , kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

tj. členy v součinu až po  $c_k$  jsou stejné jako v součinu  $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k)$ . Posloupnost  $(c_n)$  bývá také nazývána *konvolucí* posloupností  $(a_n), (b_n)$ .



Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

### Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$  je v.f.p.  $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$ .

Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

### Příklad

Protože  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ , dostáváme konvolucí posloupnosti  $(1, 1, \dots)$  se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} x^n,$$

což již sice máme dokázáno z dřívějšíka (dokonce dvakrát – jednou díky zobecněné binomické větě a podruhé díky derivaci řady), ale další důkaz jistě nezaškodí :-).

## Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

## Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u  $x^{70}$  v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})(1 + x + x^2 + \dots + x^{50}).$$

Tento součin upravíme na tvar

$(1 - x)^{-3}(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})$ , odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left( \binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \dots \right) (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + \dots)$$

a tedy koeficientem u  $x^{70}$  je zřejmě

$$\binom{70+2}{2} - \binom{70+2-31}{2} - \binom{70+2-41}{2} - \binom{70+2-51}{2} = 1061.$$

## Příklad

Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

## Řešení

Potřebnou konvoluci získáme součinem řad  $\frac{1}{1-x}$  a  $\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$ .  
Odtud

$$[x^n] \frac{1}{(1-x)^2} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \frac{1}{k},$$

odkud již snadnou úpravou dostaneme požadované.