Diskrétní matematika – 11. týden
Vytvořující funkce a rekurence

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

1. Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
2. Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
3. Řešení rekurencí

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

(Formální) mocninné řady

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $R \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $k \gg 0$ *je* $|a_k| \leq R^k$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$. *Hodnotami funkce* $a(x)$ *na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má* $a(x)$ *v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k,$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k},$$

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k,$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} \alpha^k \cdot x^k.$$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.
- $(\sum a_k x^k) \cdot (\sum b_k x^k) = \sum c_k x^k$, kde

  $$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

  Posloupnost (c_k) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_k), (b_k)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \cdots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k), je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \cdots + 2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Rozklad na parciální zlomky!

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme "otočením" polynomu – provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2:

$$\begin{aligned} 1 - 5\tfrac{1}{t} + 6\tfrac{1}{t^2} &= (1 - 2\tfrac{1}{t})(1 - 3\tfrac{1}{t}) \\ t^2 - 5t + 6 &= (t - 2)(t - 3) \end{aligned}$$

Přitom poslední tvar je již klasický rozklad na kořenové činitele, ve kterém můžeme použít např. známé vzorečky pro kořeny kvadratického polynomu.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`).

Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[k = 1], [2|k]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^k ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^k]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro k-tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \lambda x} + \frac{B}{1 - \mu x},$$

kde λ, μ jsou kořeny $t^2 - t - 1$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Odtud už vcelku snadno vyjde $F_k = A \cdot \lambda^k + B \cdot \mu^k$, jak to známe z dřívějška.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$. Navíc je vidět, že $\lim_{k\to\infty} F_{k+1}/F_k = \lambda \approx 1.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^k udává a_k, tj. $a_k = [x^k]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_k = 3^k - 2^k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
    if L == []: return []
    return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
           + L[0:1]
           + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i-tý největší, je $\frac{1}{k}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i-1$ a $k-i$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_k = k - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left(C_{i-1} + C_{k-i} \right).$$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu $\left((1-x)^2 C(x)\right)' = \frac{2x}{1-x}$, a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right),$$

odkud konečně $C_k = 2(k+1)(H_{k+1} - 1) - 2k$.