Diskrétní matematika – 11. týden
Vytvořující funkce a rekurence

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Faku ta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

1. Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
2. Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
3. Řešení rekurencí

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

(Formální) mocninné řady

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$.

(Formální) mocninné řady

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má $a(x)$ v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

Přehled mocninných řad

$(1,2,4,\dots,2^k,\dots)$

$\frac{1}{1-2x} = \sum 2^k \cdot x^k$ $\rightarrow$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k,$$ $(1,1,\dots)$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k},$$ $(0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\dots)$

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k,$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} \alpha^k \cdot x^k.$$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum \underline{(a_k + b_k)} x^k$.

a(x) + b(x)

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\underline{\alpha a_k}) x^k$.

$\alpha \cdot a(x)$

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.

$\ldots, a_0, a_1, \ldots$

$\ldots, a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots$

0

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k):

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.
- $(\underbrace{\sum a_k x^k}_{a(x)}) \cdot (\underbrace{\sum b_k x^k}_{b(x)}) = \sum c_k x^k$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Posloupnost (c_k) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_k), (b_k)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

v.f.p. (1, 1, ...)

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \cdots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k), je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \cdots + 2^k)$ funkce

plati

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \cdots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k), je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \cdots + 2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

$a_k = a_{k-1} + 2^k$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Rozklad na parciální zlomky!

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele. $Q(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_\ell)$
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x-\alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x-\alpha_\ell}. \qquad = \frac{\text{-----}}{Q(x)}$$

- Má-li kořen α násobnost k, pak jsou příslušné parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

místo jednoho $\frac{A}{x-\alpha}$ zl.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

$$\frac{A}{(-\alpha+x)^k} = \frac{\overbrace{A}^{=B}}{(-\alpha)^k\left(1-\frac{1}{\alpha}x\right)^k} = \frac{B}{\left(1-\frac{1}{\alpha}x\right)^k}$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme "otočením" polynomu provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2:

$$1 - 5\frac{1}{t} + 6\frac{1}{t^2} = (1 - 2\frac{1}{t})(1 - 3\frac{1}{t})$$
$$t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme "otočením" polynomu provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2:

$$1 - 5\tfrac{1}{t} + 6\tfrac{1}{t^2} = (1 - 2\tfrac{1}{t})(1 - 3\tfrac{1}{t})$$
$$t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

Přitom poslední tvar je již klasický rozklad na kořenové činitele, ve kterém můžeme použít např. známé vzorečky pro kořeny kvadratického polynomu.

Plán přednášky

1. Vytvořující funkce, rozvinutí do mocninné řady
2. Vytvořující funkce a Fibonacciho čísla
3. Řešení rekurencí

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`).
Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`).
Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet k-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.
Např. $[k = 1], [2|k]$ apod.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[k = 1], [2|k]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^k ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^k]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro k-tý člen posloupnosti.

$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} + 1 \cdot [k=1]$ $\quad / \sum (\ ) \cdot x^k$

$(0, 1, 0, \dots)$

$F(x) = x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x) + x$

$(1 - x - x^2)\, F(x) = x$

$F(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2} = \dfrac{x}{(1-\lambda x)(1-\mu x)} = \dfrac{A}{1-\lambda x} + \dfrac{B}{1-\mu x}$

$t^2 - t - 1 = (t - \lambda)(t - \mu)$ $\quad \Big| \ \lambda, \mu = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro k-tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \lambda x} + \frac{B}{1 - \mu x}$$

$x = A(1-\mu x) + B(1-\lambda x)$

$0 = -A + B \rightarrow B = -A$

$1 = -A\mu + A\lambda$

kde λ, μ jsou kořeny $t^2 - t - 1$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Odtud už vcelku snadno vyjde $F_k = A \cdot \lambda^k + B \cdot \mu^k$, jak to známe z dřívějška.

$\boxed{A = \frac{1}{\lambda - \mu}}$

$\frac{1}{1-x} = \sum x^k$ $\quad \frac{1}{1-\lambda x} = \sum \lambda^k x^k$

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \overset{\frac{1}{\lambda-\mu}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left[\left(\overset{\lambda}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)^k - \left(\overset{\mu}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\overset{\substack{\lambda \\ \parallel}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$. Navíc je vidět, že $\lim_{k\to\infty} F_{k+1}/F_k = \lambda \approx 1.618$, což je poměr známý jako zlatý řez objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě. + přírodě

Plán přednášky

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence. $a_k = F(a_{k-1}, a_{k-2}, k) \rightsquigarrow a_k = G(k)$

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Řešení rekurencí

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^k udává a_k, tj. $a_k = [x^k]A(x)$. rozklad na parc. zl.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$ pro $k \geq 2$

neplatí pro $k=1$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$. pro $k \geq 0$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

$[k = n]$

x^n

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

$t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_k = 3^k - 2^k$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
    if L == []: return []
    return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
    if L == []: return []
    return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
         + L[0:1]
         + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k - 1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i-tý největší, je $\frac{1}{k}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i - 1$ a $k - i$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i-tý největší, je $\frac{1}{k}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i-1$ a $k-i$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_k = k - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left(C_{i-1} + C_{k-i} \right).$$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

pro $k \geq 0$

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}, \; C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

$C(x) = \sum C_k x^k$

$C'(x) = \sum k \cdot C_k \cdot x^{k-1} = \sum (k+1) C_{k+1} x^k$

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$

posunutí posl. pro $C'(x)$

$\Rightarrow xC'(x)$

$2 \cdot x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot C(x)$

$\frac{2}{(1-x)^3} = 2\sum \binom{k+2}{2} x^k = \sum (k+2)(k+1) x^k$

+ posunutí o dva členy

$\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$
- $\cancel{x}C'(x) = \frac{2x^{1}}{(1-x)^3} + 2\frac{\cancel{x}C(x)}{1-x}$ dif. rovnice pro $C(x)$?

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1},\, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu $((1-x)^2 C(x))' = \frac{2x}{1-x}$, a tedy

$(k+1)$ $*$ $(\frac{1}{k})$

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right),$$

odkud konečně $C_k = 2(k+1)(H_{k+1} - 1) - 2k$.