

1.

a) Číslo  $0 \leq x < 10000$  je v tzv. modulární reprezentaci vzhledem k prvočísłům 17, 23, 29 dáno svými zbytky (5, 13, 9) po dělení těmito prvočísly:

$$x \equiv 5 \pmod{17}, x \equiv 13 \pmod{23}, x \equiv 9 \pmod{29}.$$

Převeďte jej do modulární reprezentace vzhledem k prvočísłům 19, 31, 37.

(Nápověda: Určete prvně  $x$ .)

b) Jak se odpověď změní, nebudeme-li nadále požadovat  $0 \leq x < 10000$ ?

(Nápověda: pro jaké reprezentace (a, b, c) vzhledem k 17, 23, 29 a (d, e, f) vzhledem k 19, 31, 37 bude nějaké  $x$  existovat?)

2.

a) Ukažte, že 55 je primitivní kořen modulo 106.

b) Kolik existuje primitivních kořenů modulo 106?

3.

V šifrovacím systému RSA s veřejným klíčem daným modulem 1763 a exponentem 97 došlo k prozrazení faktorizace modulu:

$$1763 = 41 \cdot 43$$

Dešifrujte zprávu 11. (Nic nešifrujte, chce se po vás pouze dešifrování.)

4.

Zbytková třída  $a \pmod{m}$  splňuje  $a^{48} \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $a^{38} \equiv 1 \pmod{m}$ . Jaký může být řád této zbytkové třídy? Pro obě možnosti uveďte příklad takové zbytkové třídy, tj. čísla  $a$ . (Nápověda: Využijte Eukleidova algoritmu k postupnému dělení mocnin  $a^{48}/a^{38}$  atd.)

5.

Najděte všechna přirozená čísla  $m$ , pro něž  $\varphi(m) = 46$ , kde  $\varphi$  značí Eulerovu funkci.