

Algebra I – podzim 2019 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Buď R podokruh okruhu všech matic typu 2×2 nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ s obvyklými operacemi, jehož nosičem je množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), r \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Rozhodněte, zda množina

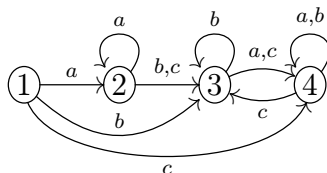
$$\left\{ \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid a, b, r \in \mathbb{Z}, 2 \text{ dělí } a, 4 \text{ dělí } b, q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \right\}$$

je ideálem okruhu R a zda množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & c + \frac{d}{\sqrt{2}} \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}, b \text{ sudé} \right\}$$

je jeho podokruhem.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & h \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f, g \in \mathbb{Z}[x], h \in \mathbb{C}[x] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & h \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f \in \mathbb{Z}[x], h \in \mathbb{R}[x], 2 \text{ dělí } f(1) \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}$ nad \mathbb{Q} .

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 + 3\alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(2 - \alpha) = 2\alpha + 2$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu, který není oborem integrity, a jeho podokruhu, který oborem integrity je.
7. (10 bodů) Dejte příklad dvou necyklických grup G a H takových, že existuje jediná podgrupa grupy G , která je izomorfní nějaké podgrupě grupy H .
8. (5 bodů) Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.
9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.
10. (10 bodů) Přímo z definic dokažte, že každá grupa je izomorfní nějaké grupě permutací.