

Algebra I – podzim 2021 – 4. termín

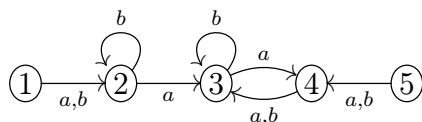
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Uvažujme pologrupy $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \bullet)$ a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \odot)$ s operacemi zadanými předpisy

$$\begin{aligned}(a, b) \bullet (c, d) &= (ac, bc + d), \\ (a, b) \odot (c, d) &= (ac, bd + ad + bc).\end{aligned}$$

O obou strukturách $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \bullet)$ a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \odot)$ (kde $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ je standardní komutativní grupa dvojic celých čísel se sčítáním po složkách) rozhodněte, zda jsou okruhem, případně oborem integrity, případně tělesem.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $((\mathbb{Z}, +) \times (G, \cdot))/H$, kde

$$\begin{aligned}G &= \left\{ \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ f & 2^p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[x] \right\}, \\ H &= \left\{ \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ f & 2^p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}[x] \text{ je dělitelný polynomem } x^2 - (i+1)x + i \right\}.\end{aligned}$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot i - \sqrt{2}$ nad \mathbb{Q} .

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 + 2\alpha^4 + \alpha^3 + 3\alpha^2 + 12\alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $(2 + \alpha)(4 + \alpha^3) = -2$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu R , jeho podokruhu S a homomorfismu okruhů $\varphi: S \rightarrow T$ takového, že neexistuje homomorfismus $\psi: R \rightarrow T$, jehož zúžení na S je rovno φ .
7. (10 bodů) Dejte příklad grupy G , která má právě šest maximálních podgrup (tj. podgrup různých od G , které nejsou obsaženy v žádné jiné podgrupě kromě celé grupy G).

8. (5 bodů) Definujte, co se rozumí tím, když se o oboru integrity řekne, že je s jednoznačným rozkladem.
9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.
10. (10 bodů) Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.